ENERGÍA

Su relevancia en mecánica, termodinámica, átomos, agujeros negros y cosmología

Dr. Osvaldo Moreschi



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

E N E R G Í A

Su relevancia en mecánica, termodinámica, átomos, agujeros negros y cosmología

Dr. Osvaldo Moreschi

autoridades

Ministerio de Educación.
Instituto Nacional de Educación Tecnológica.
Saavedra 789. C1229ACE.
Ciudad Autónoma de Buenos Aires.
República Argentina.
2010

E N E R G Í A

Su relevancia en mecánica, termodinámica, átomos, agujeros negros y cosmología

Dr. Osvaldo Moreschi



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección “Las Ciencias Naturales y la Matemática”.
Director de la Colección: Juan Manuel Kirschenbaum
Coordinadora general de la Colección: Haydeé Noceti.

Industria Argentina

ISBN 978-950-00-0795-5

Director de la Colección:
Lic. Juan Manuel Kirschenbaum
Coordinadora general y académica de la Colección:
Prof. Ing. Haydeé Noceti
Diseño didáctico y corrección de estilo:
Lic. María Inés Narvaja
Ing. Alejandra Santos
Coordinación y producción gráfica:
Tomás Ahumada
Diseño gráfico:
María Victoria Bardini
Augusto Bastons
Ilustraciones:
Diego Gonzalo Ferreyro
Federico Timerman
Retoques fotográficos:
Roberto Sobrado
Diseño de tapa:
Tomás Ahumada
Administración:
Cristina Caratozzolo
Néstor Hergenrether
Colaboración:
Téc. Op. en Psic. Soc. Cecilia L. Vazquez
Jorgelina Lemmi

Nuestro agradecimiento al personal del Centro Nacional de Educación Tecnológica por su colaboración.

Moreschi, Osvaldo
Energía. Su relevancia en mecánica termodinámica, átomos, agujeros negros y cosmología / Osvaldo Moreschi; dirigido por Juan Manuel Kirschenbaum.
- 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2010.
172 p.: il.; 24x19 cm. (Las ciencias naturales y la matemática / Juan Manuel Kirschenbaum).

ISBN 978-950-00-0795-5

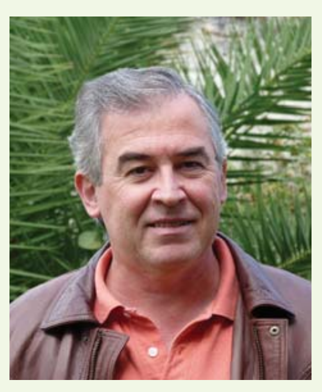
1. Física.
2. Enseñanza Secundaria.
I. Kirschenbaum, Juan Manuel, dir.
II. Título

CDD 530.712

Fecha de catalogación: 30/07/2010

Impreso en Anselmo L. Morvillo S. A., Av. Francisco Pienovi 317 (B1868DRG), Avellaneda, Pcia. de Buenos Aires, Argentina.

Tirada de esta edición: 100.000 ejemplares



Dr. Osvaldo Moreschi

El Autor

El Dr. Osvaldo M. Moreschi es Profesor Titular con dedicación exclusiva en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba.
Es miembro de la Carrera del Investigador del CONICET desde 1988. Obtuvo el título de Licenciado en Física, en el IMAF, Instituto de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.
Fue becario doctoral obteniendo título de Doctor of Philosophy (Ph.D.),Department of Physics and Astronomy, University of Pittsburgh, Estados Unidos. Profesor visitante en el Department of Statistics and Mathematics, University of Pittsburgh, Estados Unidos.
Ejerció posiciones posdoctorales en el instituto Max Planck Institut für Astrophysik, Alemania; en la Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Italia y en el International Centre for Theoretical Physics, Italia.
Ha publicado decenas de artículos científicos en revistas internacionales.
Actualmente es miembro del Directorio del Instituto de Física Enrique Gaviola, CONICET.

ÍNDICE

Capítulo 1

La energía como concepto básico de sistemas mecánicos sencillos

1.1. Introducción

La primera pregunta que, probablemente, uno se puede hacer, en relación con la energía, es

¿por qué estudiar el concepto de energía?

La respuesta corta es porque es un concepto muy útil que se puede aplicar a una gran cantidad de situaciones y nos ayuda a comprender sistemas variados.

En física, se han desarrollado distintos marcos teóricos que son útiles para describir, exitosamente, distintos tipos de sistemas físicos. A continuación mencionaremos algunos de los marcos teóricos que se utilizan.

1. **La mecánica clásica.** Este marco teórico es el que se desarrolló, históricamente, en primer término. Está asociado, principalmente, a los nombres de Galileo Galilei (1564-1642), quien aportó en la noción de espacio, tiempo y simetrías; y de Isaac Newton (1642-1727), quien aportó con las leyes dinámicas y de la gravitación. Naturalmente, muchos otros investigadores han aportado a la construcción de esta disciplina.

En término de este marco teórico se describen muy bien, por ejemplo, el movimiento de los planetas y muchos sistemas de la vida cotidiana.

2. **La mecánica relativista o relatividad especial.** Surgió de la necesidad de integrar el conocimiento de las interacciones electromagnéticas. Sucede que, en el siglo XIX, James Clerk Maxwell (1831-1879) escribió las ecuaciones que describen los campos electromagnéticos; pero dichas ecuaciones introducían una velocidad característica que, por el momento, denominaremos c, que no aparecía en el marco teórico de la física clásica.
Posteriormente, en 1905, Albert Einstein sugiere una manera de interpretar las cosas, lo que da origen a la llamada relatividad especial. Ahora entendemos que la velocidad c es una característica fundamental de la noción de espaciotiempo y que, en particular, constituye un límite para la velocidad de propagación de las interacciones, cualquiera que ellas sean, electromagnéticas o de otra clase.
El vocablo ‘espaciotiempo’ merece una mención especial. El estudio de la física nos ha obligado a introducir neologismos. Este es un caso paradigmático, en el que hemos aprendido, por medio de la relatividad especial, a que en realidad existe un

solo objeto que mezcla las nociones clásicas de espacio y tiempo en una sola unidad. Es por ello que el término se escribe junto, esto es: 'espaciotiempo'; y no con un guión en el medio, pues esto último indicaría todavía una noción clásica de separabilidad de los conceptos espacio y tiempo.

3.Teoría de la gravedad relativista o relatividad general. La teoría de la gravitación sugerida por Newton dentro del marco teórico de la mecánica clásica, no incluía ninguna noción relativista, es decir, la velocidad c no aparece en ninguna de sus ecuaciones; por lo que se estaba en frente de una incógnita. Nuevamente, las contribuciones de Albert Einstein han sugerido un nuevo marco teórico donde se puede hacer una descripción consistente de efectos gravitatorios con relatividad incluida. Lo importante de remarcar, es que constituye un nuevo marco teórico que no coincide con la relatividad especial. Por ello, se la llama también relatividad general. En 1916, Albert Einstein publica las ecuaciones fundamentales que gobiernan la estructura del espaciotiempo de la relatividad general.
Se dice que en este caso se está en presencia de un espaciotiempo curvo; mientras que la relatividad especial trata un espaciotiempo plano. Más adelante profundizaremos sobre estos términos.

4.Mecánica cuántica. Cuando en las primeras décadas del siglo XX se comenzó el estudio detallado de la estructura atómica de la materia, se confrontó, inmediatamente, que los marcos teóricos existentes no eran satisfactorios para la descripción de los sistemas atómicos. Es así como comienza el desarrollo de la mecánica cuántica (no relativista). Erwin Schrödinger y Werner Heisenberg, en la década del 1920, hicieron importantes contribuciones a la dinámica de la mecánica cuántica.

5.Mecánica cuántica relativista. La primera versión de la mecánica cuántica no incluía tampoco la mencionada velocidad característica c, por lo que era necesario construir una versión relativista de la misma. Paul A.M. Dirac hizo importantes aportes a la descripción dinámica relativista del electrón; lo que constituyó el primer paso en la dirección de la construcción del marco teórico de una mecánica cuántica relativista. La descripción que se hace al presente de las llamadas partículas elementales es por medio de campos cuánticos relativistas; por lo que, frecuentemente, se habla de la teoría de campos cuánticos.

En cada uno de estos marcos teóricos podemos agregar los sistemas tratados por la **mecánica estadística**, o también llamada **física estadística**. O sea, sistemas de muchos subsistemas (partículas). En todos estos marcos teóricos la noción de energía adquiere la forma de un concepto preciso.

En los primeros siete capítulos comenzaremos por estudiar la noción de energía en el primer marco teórico de la mecánica clásica. En el capítulo 8 veremos el concepto de energía en el marco teórico de la mecánica relativista. En el capítulo 9 y 12 estudiaremos la noción de energía en sistemas de la mecánica cuántica. En el capítulo 10 discutiremos sistemas gravitatorios relativistas, mientras que en el 11 su incidencia en el sistema cosmológico. En el capítulo 13 veremos sistemas de partículas elementales relativistas, que precisan de una descripción cuántica relativista.

Veamos a continuación algunos ejemplos mecánicos sencillos en los que podemos hacer uso del concepto de energía. En ellos la energía E aparece como suma de la energía cinética $\mathcal{E}$ más la energía potencial $\mathbf{U}$ para cada caso.

1.2. Masa atada a un resorte

Consideremos una masa M atada a un resorte de longitud natural l_0. Supongamos que la masa se puede mover, solamente, a lo largo del eje x. Diremos que tenemos un resorte ideal si la fuerza, cuando se aparta al resorte de su posición de equilibrio en $\Delta x = x - l_0$, es

$$F = -k\Delta x \tag{1.1}$$

donde k es una constante. Notar el signo menos. La ley de la dinámica de Newton nos dice que

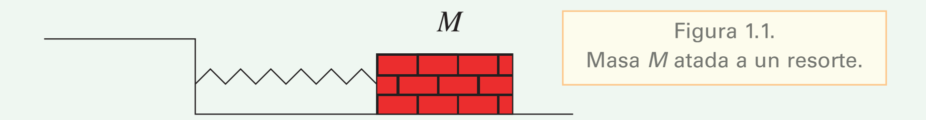


Figura 1.1.
Masa M atada a un resorte.

la aceleración a de la partícula está dada por

$$M a = -k\Delta x\,; \tag{1.2}$$

donde estamos definiendo a x como el apartamiento de la posición de equilibrio. La solución a esta ecuación es de la forma

$$x = l_0 + A\, cos(\omega t + \phi), \tag{1.3}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}\,. \tag{1.4}$$

En este caso la energía E del sistema está dada por

$$E = \mathcal{E} + \mathbf{U}\,; \tag{1.5}$$

donde la energía cinética está dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}M v^2 \tag{1.6}$$

y la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2; \tag{1.7}$$

por lo que

$$E = \frac{1}{2}M v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2; \tag{1.8}$$

donde la velocidad v para este movimiento es

$$v = -A\omega sen(\omega t + \phi)\,. \tag{1.9}$$

Vemos, entonces que

$$E = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \; sen^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 cos^2(\omega t + \phi)$$
$$= \frac{1}{2} M A^2 \frac{k}{M} \; sen^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} k A^2; \quad (1.10)$$

donde hemos usado que $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$. Notamos que la energía se conserva en este movimiento; es decir, no cambia con el tiempo.
En los sistemas en los que uno sabe que hay cantidades conservadas se puede usar estas cantidades para describir los mismos. Por ejemplo, si se conoce que vale la ecuación

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k (x - l_0)^2 = \text{constante} \; ; \quad (1.11)$$

entonces se puede usar esta ecuación para calcular $\boldsymbol{v}^2$ si conoce $\boldsymbol{x}$; sin tener que resolver la ecuación de movimiento (1.2).
En la gráfica 1.2 se muestra la energía potencial $\boldsymbol{U}$ como función de la posición $\boldsymbol{x}$. Vemos que la energía cinética se anula en los extremos del movimiento y es máxima cuando $\boldsymbol{x} = l_0$.

Este movimiento se lo denomina *oscilatorio armónico*.

Ejercicio 1.1 Sea la situación de una masa M =1kg atada a un resorte de constante k =1N/m, como la descripta anteriormente, donde el movimiento es tal que la amplitud es A = 0,1m. ¿Cuál es el valor máximo de la velocidad v?

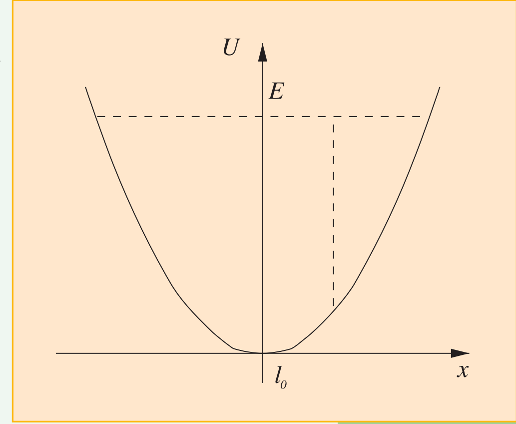


Figura 1.2.
A cada energía total E le corresponde una amplitud. La energía cinética $\mathcal{E}$ es la diferencia entre la energía total y la potencial U, estando representada por la línea vertical a trazos. Notar que el eje horizontal tiene origen en l_0.

1.3. Proyectil en las cercanías de la superficie terrestre

Consideremos el movimiento de un proyectil de masa M en las cercanías de la superficie terrestre. Elijamos un sistema de coordenadas, de tal forma, que la coordenada $\boldsymbol{y}$ es vertical, dirigida hacia arriba y la coordenada $\boldsymbol{x}$ es horizontal. Despreciaremos la influencia del aire sobre el proyectil. En esta aproximación el movimiento del proyectil será una parábola y se puede expresar en función del tiempo por:

$$x(t) = x_0 + t\, V_{x0}, \quad (1.12) \qquad y(t) = y_0 + t\, V_{y0} - \frac{1}{2} g\, t^2 \; ; \quad (1.13)$$

donde x_0 e y_0 son coordenadas iniciales, V_{x0} y V_{y0} son velocidades iniciales y $\boldsymbol{g}$ es la aceleración de la gravedad.

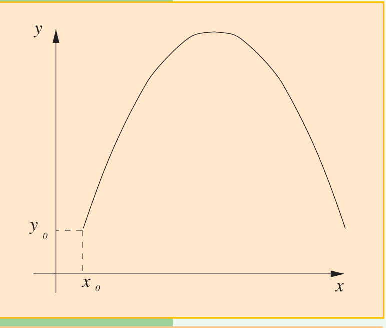


Figura 1.3. Tiro balístico de un proyectil.

Las velocidades como función del tiempo están dadas por:

$$V_x(t) = V_{x0}, \tag{1.14}$$

$$V_y(t) = V_{y0} - g\,t\,; \tag{1.15}$$

En este caso la energía potencial es

$$U = M g y\,, \tag{1.16}$$

por lo que la energía E del proyectil está dada por:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M v^2 + M g y = \frac{1}{2}M\left(V_x(t)^2 + V_y(t)^2\right) + M g\left(y_0 + t\,V_{y_o} - \frac{1}{2}g\,t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\left(V_{x0}^2 + (V_{y0} - g\,t)^2\right) + M\,g\left(y_0 + t\,V_{y0} - \frac{1}{2}g\,t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\left(V_{x0}^2 + (V_{y0} - g\,t)^2\right) + M\,g\left(y_0 + t\,V_{y0} - \frac{1}{2}g\,t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\left(V_{x0}^2 + V_{y0}^2 - 2V_{y0}g\,t + g^2t^2\right) + M\,g\left(y_0 + t\,V_{y\,0} - \frac{1}{2}g\,t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\left(V_{x0}^2 + V_{y0}^2\right) + M\,g\,y_0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

que es una constante; es decir, no depende del tiempo. Vemos que, en este caso también la energía se conserva.

Ejercicio 1.2 En época de carnaval, un niño deja caer una bombita que contiene 250 g de agua, desde la ventana que está 30 m sobre la vereda. Usando la ley de conservación de la energía, ¿a qué velocidad llega la bombita al piso? ¿Cuál es su energía cinética al arribar al piso?

Ejercicio 1.3 Una pistola de 9 mm dispara, horizontalmente, una bala de 8 g de masa con una velocidad de 305 m/s. Despreciando el frenado por el aire, ¿cuánto desciende el proyectil luego de haber viajado 20 m horizontales? ¿Cuánto vale su energía cinética ε_{20} en ese momento? ¿Es mayor o menor que la energía cinética inicial $\mathcal{E}_0$?

Ejercicio 1.4 Estudiemos la situación combinada de los temas tratados en las secciones 1.2 y 1.3. Sea la situación en que una masa M = 1kg está suspendida de un resorte de constante $k = 100\,\frac{kg}{s^2}$, en presencia de la aceleración gravitatoria constante g = 9,8 m/s^2 en la dirección vertical hacia abajo; como indica la figura 1.4. El resorte tiene longitud natural l_0 = 0,8 m.

a) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando el sistema está en equilibrio?

b) Asumiendo un movimiento vertical, defina la coordenada y con origen en la posición de equilibrio. Suponga que, inicialmente, la masa es desplazada hacia arriba de la posición de equilibrio

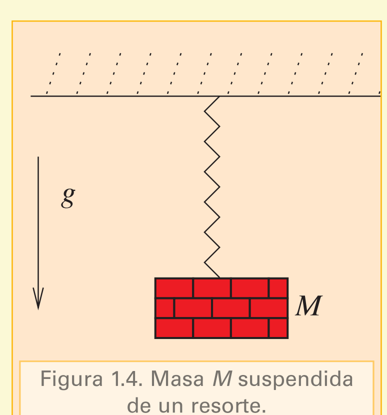


Figura 1.4. Masa M suspendida de un resorte.

por una distancia de 0,05 m y se la suelta.
b.1) Escriba la ecuación de movimiento en este sistema de coordenadas.
b.2) Escriba la solución general a la ecuación de movimiento.
b.3) Elija las constantes de la solución general para adaptarlas a la condición inicial del movimiento.
b.4) Haga el chequeo explícito de que la energía mecánica de este sistema se conserva.

1.4. Sistema de un planeta moviéndose alrededor del Sol

El movimiento de los planetas se explica, muy bien, con las leyes de la dinámica y la ley de la gravitación de Newton. Sin embargo, históricamente las trayectorias de los planetas fueron descriptas, inicialmente, por las llamadas leyes de Kepler.

Si bien las leyes de Newton explican las leyes de Kepler, usaremos, en esta ocasión, estas últimas por cuestiones de simplicidad.

Haciendo uso de observaciones astronómicas de Tycho Brahe y suyas, Kepler (1571-1630) dedujo las tres célebres leyes del movimiento de los planetas alrededor del Sol; ellas son:

K1 Los planetas se mueven describiendo elipses, ubicándose el Sol en uno de sus focos.
K2 La línea que une al Sol con cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
K3 Los cubos de la distancia media de los planetas al Sol son proporcionales a los cuadrados de su tiempo de revolución.

Haciendo uso de un sistema cartesiano de coordenadas, de tal forma que la elipse, recorrida por un planeta, está en el plano (x, y), podemos describir al movimiento del planeta por las funciones $x(t)$, $y(t)$ del tiempo t.
Similarmente, haciendo uso de un sistema de coordenadas polares en el plano $(r; \phi)$, también podemos describir el movimiento en término de las funciones $r(t)$, $\phi(t)$ del tiempo t. En este caso r es la distancia del origen del sistema de coordenadas al planeta y ϕ el ángulo que forma el vector posición con el eje x. Ver el Apéndice B para una descripción de coordenadas polares.
Un punto en la elipse se lo puede representar por la relación



Figura 1.5.
Trayectoria elíptica donde un foco de la elipse está ubicado en el origen de coordenadas. Se ha usado una gran excentricidad con valor $e = 0{,}8$.

$$x(\phi) = r(\phi)\cos(\phi), \tag{1.18}$$

$$y(\phi) = r(\phi)sen(\phi), \tag{1.19}$$

donde la función $r(\phi)$, que representa la distancia del Sol al planeta, viene dada por

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\, cos(\phi)}\, ; \qquad (1.20)$$

donde p y e son constantes. Al parámetro e se lo llama excentricidad de la órbita.

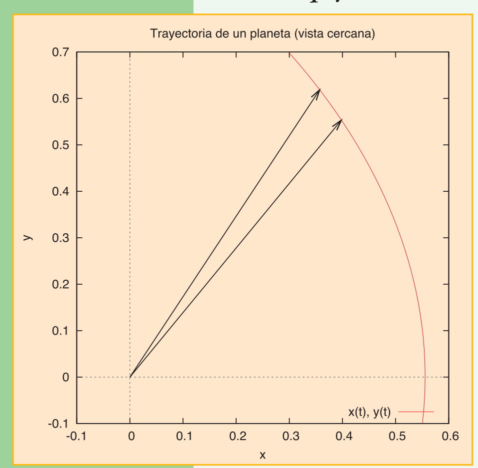


Figura 1.6. Ampliación de un tramo de trayectoria elíptica donde se han marcado dos vectores posiciones para dos tiempos cercanos.

Sólo basta considerar ahora la dependencia del ángulo ϕ con el tiempo t; para esto hacemos uso de la segunda ley de Kepler. El área barrida en un pequeño lapso de tiempo Δt por el planeta, se puede expresar por $\frac{1}{2}r^2\Delta\phi$; donde $\Delta\phi$ es el incremento del ángulo ϕ en el lapso de tiempo Δt. Esta expresión para el área barrida proviene del hecho que podemos aproximar dicha área por un triángulo rectángulo de altura r y base $r\Delta\phi$. Consideremos que el radiovector de la derecha que se muestra en la figura 1.6 tiene módulo r y que dibujamos un triángulo rectángulo por medio de un pequeño segmento que enlaza el dibujo de los dos radiovectores. El área de este triángulo rectángulo es igual al área barrida por el radio vector, en primer orden del ángulo $\Delta\phi$ entre los radiovectores; cuyo valor está dado por $\frac{1}{2} \times r \times r\Delta\phi$; o sea, base por altura sobre dos.

La segunda ley de Kepler, afirma entonces que:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = j\, , \qquad (1.21)$$

donde j es una constante. En el límite para Δt muy pequeño; es decir, tendiendo a cero, llamaremos a la relación $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ velocidad angular del ángulo ϕ, o simplemente v_ϕ.
La energía E de este movimiento está dada por

$$E = \mathcal{E} + \mathbf{U}\, ; \qquad (1.5)$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía cinética del planeta y U la energía potencial. La energía cinética está dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\,(v_x^2 + v_y^2), \qquad (1.22)$$

donde v_x y v_y son las velocidades asociadas a las coordenadas cartesianas x e y, respectivamente, y m es la masa del planeta.
La energía potencial está dada por

$$U = -G\frac{mM}{r}, \qquad (1.23)$$

donde G es la constante de la gravitación y M la masa del Sol.
El parámetro de la órbita p se puede expresar en término de las otras constantes que hemos visto, teniendo el valor:

$$p = \frac{4j^2}{GM}\, . \qquad (1.24)$$

Llamando v_r a la tasa de variación instantánea de la coordenada r como función del

tiempo ***t*** y haciendo uso de las relaciones explicadas en el Apéndice **C** se puede deducir que:

$$v_x = v_r\, cos(\phi) - r\; sen(\phi)\, v_\phi\,, \qquad (1.25) \qquad v_y = v_r\, sen(\phi) + r\; cos(\phi)\, v_\phi\;; \qquad (1.26)$$

de donde se puede ver fácilmente que

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_r^2 + r^2 v_\phi^2\,. \qquad (1.27)$$

Notemos que, haciendo uso de la ecuación (1.20), v_r se puede expresar por

$$v_r = \frac{p}{(1+e\;cos\,(\phi))^2}\, e\; sen(\phi) v_\phi = \frac{r^2}{p} e\; sen(\phi)\, v_\phi\,; \qquad (1.28)$$

mientras que $\boldsymbol{v_\phi}$ satisface

$$v_\phi = \frac{2j}{r^2}\,. \qquad (1.29)$$

Por lo tanto, el cuadrado de la velocidad viene dado por

$$\begin{aligned}
v^2 &= v_r^2 + r^2 v_\phi^2 = \frac{r^4}{p^2} e^2 sen^2(\phi)\, v_\phi^2 + r^2 v_\phi^2 = \left(\frac{r^4}{p^2} e^2 sen^2(\phi) + r^2\right)\frac{4j^2}{r^4}\\
&= 4j^2\left(\frac{1}{p^2}e^2 sen^2(\phi) + \frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{2j}{p}\right)^2\left(e^2 sen^2(\phi) + \left(1 + e\;cos(\phi)\right)^2\right)\\
&= \left(\frac{2j}{p}\right)^2\left(e^2 sen^2(\phi) + 1 + 2e\;cos(\phi) + e^2\;cos^2(\phi)\right)\\
&= \left(\frac{2j}{p}\right)^2\left(e^2 - 1 + 2 + 2e\;cos(\phi)\right)\\
&= \left(\frac{2j}{p}\right)^2\left(e^2 - 1 + \frac{2p}{r}\right).
\end{aligned} \qquad (1.30)$$

Luego la energía de este sistema es:

$$\begin{aligned}
E &= \mathcal{E} + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2j}{p}\right)^2\left(e^2 - 1 + \frac{2p}{r}\right) - G\frac{mM}{r}\\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{2j}{p}\right)^2 (e^2 - 1) + \frac{m}{r}\left(\frac{4j^2}{p} - GM\right)\\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{2j}{p}\right)^2 (e^2 - 1),
\end{aligned} \qquad (1.31)$$

donde hemos usado la ecuación (1.24). Vemos, entonces que la energía ***E*** se conserva en este caso.

La ecuación (1.31) provee de una relación entre la excentricidad ***e*** y la energía ***E***. En particular se tiene:

- ***para energías negativas, (E < 0), se tiene e < 1 y el movimiento es elíptico.***
- ***para energía nula, (E = 0), se tiene e = 1 y el movimiento es parabólico.***
- ***para energías positivas, (E > 0), se tiene e > 1 y el movimiento es hiperbólico.***

Las elipses también son caracterizadas por el semieje mayor ***a*** y el semieje menor ***b***; que se miden desde el centro geométrico de la elipse, como se muestra en la figura 1.7. Los semiejes están relacionados a los parámetros ***p*** y ***e*** por las siguientes ecuaciones:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}\,, \qquad (1.32)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}\,. \qquad (1.33)$$

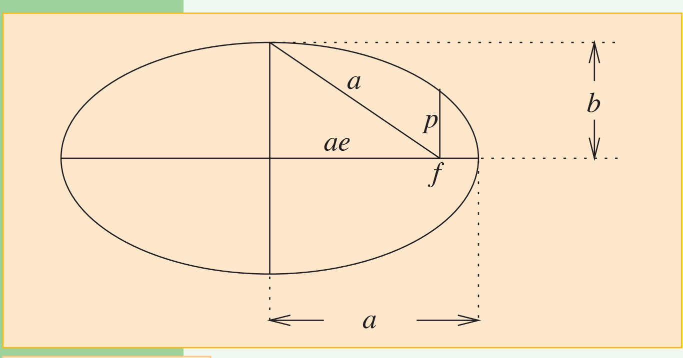


Figura 1.7.
El semieje mayor *a* y el semieje menor *b*, y su relación con otros parámetros de la elipse. El punto *f* señala la ubicación de unos de los focos.

Ejercicio 1.5 Mostrar que para el movimiento elíptico vale la relación

$$a = -\frac{GmM}{2E}\,. \qquad (1.34)$$

O sea, el semieje mayor está completamente determinado por la energía y viceversa, el semieje mayor determina la energía.

1.4.1. Aplicación a objetos cercanos a la Tierra

Los objetos cercanos a la Tierra, que en inglés se denominan "Near Earth Objetcs" (NEO), son objetos del sistema solar, como cometas y asteroides, cuyas órbitas pasan muy cerca de la Tierra.
En las últimas décadas ha aumentado el estudio de estos objetos debido a la creciente preocupación sobre el posible impacto sobre la Tierra de algún objeto que pueda producir daño.
En la actualidad existen varios programas, que incluyen cooperación internacional para observar y detectar objetos que puedan representar un peligro. En la página http://neo.jpl.nasa.gov/risk/ se puede observar una lista de objetos cuyas órbitas pasan cerca de la Tierra. De entre ellos nos concentramos en el objeto denominado *2007 VK184*; que es un objeto que se estima tiene 130 m de diámetro y tiene chances de chocar contra la Tierra en el año 2048 con una velocidad de 19 km/s.
De los elementos orbitales de *2007 VK184* vemos que su semieje mayor es ***a* = 1,72647u.a.** y que su excentricidad es ***e* = 0,56991**. El semieje mayor está expresado en la llamada *unidad astronómica* que es la distancia media Tierra-Sol y tiene el valor de **u.a.=149.597.870,66 km.**

Ejercicio 1.6 Usando los datos del cuerpo *2007 VK184* que hemos presentado en el texto y que la masa del Sol es $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg realice lo siguiente:

a) asumiendo que el objeto tiene la densidad del agua (lo que, probablemente, es una cota inferior) calcule la masa total *m* del mismo.
b) si el objeto chocase con la Tierra, ¿cuál sería la energía cinética del mismo al momento del impacto? Haciendo uso de la tabla de conversión del Apéndice A exprese el resultado en megatones de TNT.
c) Calcule la energía mecánica total del cuerpo.

Capítulo 2

La energía en sistemas mecánicos compuestos

2.1. El concepto de trabajo

En el capítulo anterior hemos visto diversos ejemplos mecánicos sencillos donde se comprobó, explícitamente, que la energía se conserva. En lo que sigue, generalizaremos el estudio a sistemas con muchas partículas y veremos que a la propiedad de conservación de la energía la satisface un gran conjunto de sistemas. Con este objetivo repasaremos la noción de trabajo y fuerzas conservativas.

2.1.1. Trabajo en una dimensión

Consideremos el caso de una partícula que sólo se puede mover a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$ de coordenadas. Supongamos que sobre la misma actúa una fuerza F_x y que la partícula se ha movido en una pequeña distancia Δx. El *trabajo* ΔW que la fuerza F_x ha hecho sobre la partícula en este movimiento es:

$$\Delta W = F_x \, \Delta x. \tag{2.1}$$

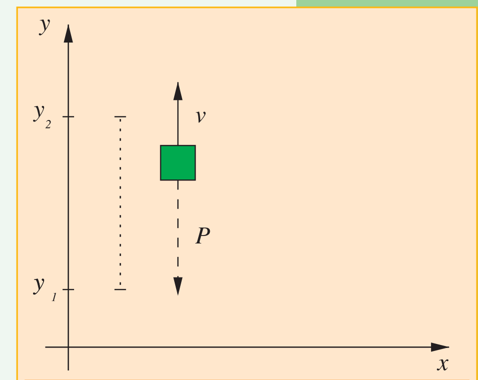


Figura 2.1.
Ejemplo de trabajo de la fuerza del peso *P* de un objeto que se está moviendo verticalmente, con velocidad instantánea *v*, hacia arriba.

Si el movimiento de la partícula es por un trecho más largo, digamos de la posición x_a a la posición x_b, podemos dividir esta distancia en pequeños trechos Δx_1, Δx_2, Δx_3, ..., Δx_n; de tal forma que el trabajo hecho por la fuerza actuante a lo largo de este movimiento será

$$W_{ab} = F_x \, \Delta x_1 + F_x \, \Delta x_2 + F_x \, \Delta x_3 \ldots + F_x \, \Delta x_n; \tag{2.2}$$

donde en cada término la fuerza F_x se evalúa en el trecho correspondiente.
En la figura 2.1 vemos un ejemplo del trabajo hecho por la fuerza del peso de un objeto de masa $\boldsymbol{m}$ que asciende una distancia $\Delta y = y_2 - y_1$. El trabajo en este caso está dado por

$$\Delta W = F_y \Delta y = (-mg)(y_2 - y_1) = -mg(y_2 - y_1) \tag{2.3}$$

donde hemos usado que la componente $\boldsymbol{y}$ de la fuerza de peso es $(-mg)$ siendo $\boldsymbol{g}$ la aceleración de la gravedad. En este caso la fuerza total $\vec{F}$ coincide con el peso $\vec{P}$ del cuerpo; donde estamos usando la notación usual de poner una flechita encima de una cantidad que denota un vector.
En este ejemplo hemos notado que el trabajo ha resultado negativo; lo que sugiere la pregunta natural, ¿qué sucede con el signo del trabajo si hubiésemos elegido que el eje $\boldsymbol{y}$ apuntase hacia abajo? Es decir, la elección del sistema de coordenadas es arbitrario, por

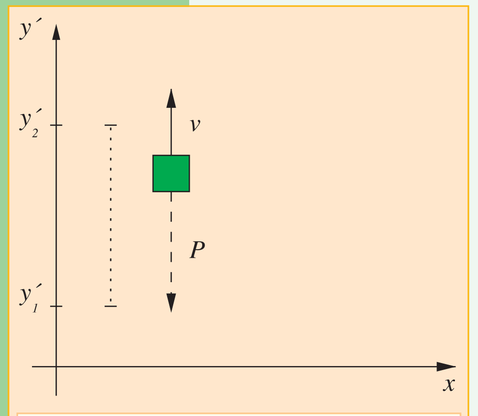


Figura 2.2.
Ejemplo de trabajo de la fuerza del peso *P* de un objeto que se está moviendo verticalmente, con velocidad instantánea v, hacia arriba.

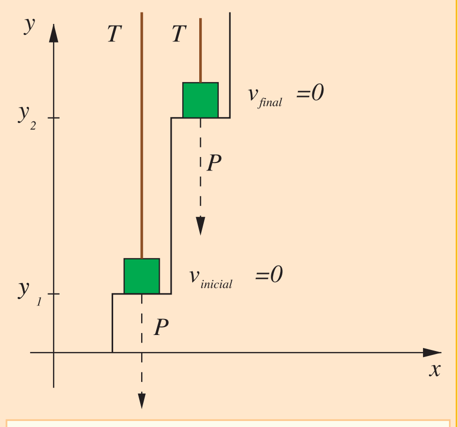


Figura 2.3.
Ejemplo de trabajo de la fuerza del peso *P* y de la tensión *T* de una cuerda que lo eleva un escalón. Las velocidades inicial $v_{inicial}$ y final v_{final} son cero.

lo que podríamos haber elegido que la coordenada y crezca hacia abajo. En la figura 2.2 presentamos la situación del mismo proceso, pero descripto respecto de un sistema de coordenadas y' que crece hacia abajo.

Con esta elección del sistema de coordenadas, calculamos nuevamente el trabajo realizado en este proceso y encontramos que:

$$\begin{aligned} \Delta W' &= F_y' \Delta y' = (mg)(y_2' - y_1') \\ &= mg\,(-(y_2 - y_1)) = \Delta W ; \end{aligned} \qquad (2.4)$$

dado que en este caso, la componente de la fuerza cambia de signo, pero el desplazamiento de la coordenada también cambia de signo (ahora y_2' es menor que y_1', por lo que su diferencia es negativa). Concluimos que el trabajo es un escalar asociado al proceso mecánico y no depende de la elección de los sistemas de coordenadas.

Como segundo ejemplo, consideremos un cuerpo que es elevado por una cuerda que está atada en su parte superior, en un escalón que tiene altura $h = y_2 - y_1$. En su posición inicial y final el cuerpo está en reposo (Figura 2.3). Para fijar ideas podemos pensar que todo el movimiento se lo ha hecho muy lentamente. En este caso el trabajo de la fuerza total está dado por

$$\begin{aligned} \Delta W &= F_y\, \Delta y = (T - mg)(y_2 - y_1) \\ &= 0 \times (y_2 - y_1) = 0 \, ; \end{aligned} \qquad (2.5)$$

donde hemos usado que en el límite de un movimiento infinitamente lento, la componente y de la fuerza total es $F_y = T - P = 0$, dado que las fuerzas se deben cancelar. En términos de trabajo, uno podría decir que la cuerda hizo el mismo trabajo que el peso. En el movimiento real de levantar una caja desde el piso a una mesa, por ejemplo, la situación es más complicada, pues inicialmente, uno hace una fuerza mayor que el peso para poder acelerar al cuerpo hacia arriba, pero luego se hace una fuerza menor para dejar que el peso gane y podamos depositar la caja en la mesa. Pero como veremos más adelante, el trabajo hecho por cada fuerza en el movimiento total se cancela.

Ejercicio 2.1 Calcular el trabajo hecho por la fuerza de tensión *T* de la cuerda en el ejemplo anterior.

2.1.2. Trabajo en tres dimensiones

Si el movimiento es en tres dimensiones, la expresión (2.1) se puede generalizar de la forma

$$\begin{aligned} W_{ab} &= F_x\, \Delta x_1 + F_x\, \Delta x_2 + F_x\, \Delta x_3 \ldots + F_x\, \Delta x_n + \\ &+ F_y\, \Delta y_1 + F_y\, \Delta y_2 + F_y\, \Delta y_3 \ldots + F_y\, \Delta y_n + \\ &+ F_z\, \Delta z_1 + F_z\, \Delta z_2 + F_z\, \Delta z_3 \ldots + F_z\, \Delta z_n \, ; \end{aligned} \qquad (2.6)$$

donde F_y y F_z son las componentes del vector fuerza en las direcciones cartesianas y y z, respectivamente.
Como ejemplo de trabajo hecho por una fuerza que implica más de una dimensión podemos mencionar el caso de un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal rígida, sujeto a la fuerza de peso $\vec{P}$, la correspondiente fuerza de reacción $\vec{N}$ de la superficie rígida, una fuerza de fricción constante $\vec{R}$ y la fuerza de aplicación $\vec{f}$, cuyo vector forma un ángulo θ con el eje cartesiano x, como muestra la figura 2.4. En este caso el trabajo W_f realizado por la fuerza $\vec{f}$ está dado por

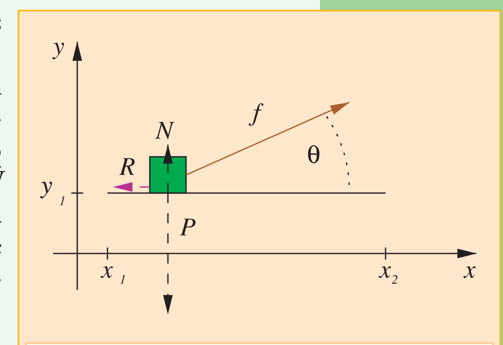


Figura 2.4. Ejemplo de trabajo de la fuerza $\vec{f}$ que actúa inclinada respecto de los dos ejes. La distancia total recorrida sobre el eje x es $\Delta x = x_2 - x_1$. En este caso no hay movimiento a lo largo del eje y.

$$\begin{aligned} W\{f\}_{12} &= f_x \Delta x + f_y \Delta y \\ &= f\cos(\theta)(x_2 - x_1) + f\,\mathrm{sen}(\theta) \times 0 \\ &= f\cos(\theta)(x_2 - x_1); \end{aligned} \qquad (2.7)$$

donde se usa la notación f para el módulo del vector $\vec{f}$ y el hecho de que $\Delta y = 0$.

2.1.3. Trabajo en un sistema de partículas

Si el sistema está compuesto por muchas partículas, el trabajo hecho sobre el sistema, es la suma de los trabajos hechos sobre cada partícula. En este caso la energía cinética también es la suma de las energías cinéticas de cada partícula; esto es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_N v_N^2\ ; \qquad (2.8)$$

para un sistema compuesto de N partículas.
Un resultado conocido [IK66, Mor00] en la mecánica de un sistema de partículas es que, el trabajo de la resultante de las fuerzas hecho sobre el sistema, está relacionado a la variación de la energía cinética de la siguiente manera:

$$W_{ab} = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a; \qquad (2.9)$$

donde $\mathcal{E}_b$ es la energía cinética final y $\mathcal{E}_a$ la inicial. A este resultado se lo conoce como teorema del trabajo-energía.

Ejercicio 2.2 Un auto de competición de rally, de 1.000 kg de masa, comienza a cruzar un vado con agua, de 7 m de ancho, a una velocidad de 120 km/h. Mientras cruza el vado, recibe una fuerza constante de frenado de 50.000 N. Asumiendo que el conductor soltó el acelerador en esa maniobra, ¿cuál es la velocidad a la salida del vado?

2.2. Fuerzas conservativas

Consideremos, nuevamente, un sistema compuesto sólo por una partícula. Se dice que la fuerza actuante es *conservativa* si el trabajo hecho por la fuerza desde la posición inicial $\vec{X}_a$ a la posición final $\vec{X}_b$ sólo depende de las posiciones iniciales y finales; o sea,

$$W_{ab} = W(\vec{X}_a, \vec{X}_b)\,; \qquad (2.10)$$

donde estamos usando, nuevamente, la notación con una flechita arriba para denotar un vector. Enfatizamos que esto quiere decir que el trabajo no depende del camino, sino que sólo depende de las posiciones iniciales y finales.
En estos casos la fuerza $\vec{F}$ se puede calcular a partir de un potencial U que se lo puede definir de la siguiente manera:

$$U(\vec{X}) = W(\vec{X}, \vec{X}_0)\,; \qquad (2.11)$$

donde $\vec{X}_0$ es una posición de referencia.
En sistemas conservativos se define la energía total E como la suma de la energía cinética y la potencial:

$$E = \mathcal{E} + U. \qquad (2.12)$$

Anteriormente afirmamos que

$$W_{ab} = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a\,; \qquad (2.9)$$

que podemos expresar por

$$W_{ab} = W_{a0} + W_{0b} = W_{a0} - W_{b0} = U_a - U_b = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a\,. \qquad (2.13)$$

La primera igualdad se deduce del hecho que, por ser un sistema conservativo, en el cálculo de W_{ab}, podemos pensar en un camino que va de $\vec{X}_a$ a $\vec{X}_0$ y luego a $\vec{X}_b$. En la segunda igualdad hemos usado que $W_{0b} = -W_{b0}$ dado que, cuando uno invierte el camino, se cambian de signo los desplazamientos. Por ejemplo Δx_i se cambia a $-\Delta x_i$.
Entonces vemos que

$$E_a = \mathcal{E}_a + U_a = \mathcal{E}_b + U_b = E_b\,. \qquad (2.14)$$

Acabamos de probar que para un sistema conservativo, es decir, un sistema para el cual tanto las fuerzas de interacción como las externas son derivables de una función potencial, vale la siguiente ley:

L 2.1 La energía total de un sistema conservativo es constante.

Es importante notar que si las fuerzas dependen sólo de la posición de las partículas, entonces el sistema es conservativo.
Los casos vistos en el capítulo anterior son de sistemas conservativos.
A continuación presentamos algunos ejemplos de fuerzas conservativas.

- Fuerza de un resorte con un extremo fijo al origen de constante k y longitud natural despreciable:

$$\vec{F} = -k\vec{X}; \qquad (2.15)$$

donde $\vec{X} = (x, y, z)$ es el vector posición. Su energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}kX^2\,; \qquad (2.16)$$

donde $X^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

- Una masa ***m*** en la cercanía de la superficie de la Tierra está sometida a la fuerza de su peso $\vec{P} = \boldsymbol{m}.\vec{g}$; donde $\vec{g}$ es el vector de la aceleración de la gravedad que, en un sistema de coordenadas cartesianas donde el eje ***z*** es vertical y apuntando hacia arriba, está dado por $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Para la cantidad ***g***, normalmente, se toma el valor de $\boldsymbol{g} = 9{,}81 m/s^2$. La energía potencial está dada para este sistema por

$$U = mgz. \qquad (2.17)$$

- Masa central *M* que interacciona gravitatoriamente con una masa ***m*** que se puede mover libremente. La fuerza gravitatoria actuante sobre la masa ***m*** es

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{X^3}\vec{X} = -\frac{GmM}{X^2}\ \vec{n}\,; \qquad (2.18)$$

donde $\vec{n}$ es el vector de módulo uno dado por $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\vec{X}$. La energía potencial para este caso es

$$U = -\frac{GmM}{\sqrt{X^2}}. \qquad (2.19)$$

Aquí vemos que, mientras la fuerza depende como la inversa de la distancia entre las masas al cuadrado, la energía potencial depende como la inversa de la distancia entre las masas.

Capítulo 3

La energía en sistemas mecánicos con muchísimas partículas: el gas ideal

Hasta aquí hemos considerado sistemas mecánicos conteniendo un número limitado de partículas. En capítulos posteriores estudiaremos sistemas termodinámicos que suelen contener un inmenso número de partículas. A modo de introducción a los sistemas termodinámicos, en este capítulo estudiaremos el sistema de *gases ideales* desde un punto de vista mecanicista; lo que nos permitirá encontrar relaciones entre variables macroscópicas y microscópicas.

3.1. Sistema de partículas no interactuantes: gases ideales

Consideremos un conjunto de N partículas encerradas en un volumen V, que no interactúan, pero que sí pueden chocar entre ellas.
Cuando una partícula de masa $\boldsymbol{m}$ choca sobre una pared, en forma elástica, formando un ángulo θ con la normal a la misma, que coincide con el plano $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; se produce una transferencia de momento a la pared. Descomponiendo el momento vectorial

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.1}$$

de la partícula antes del choque en término de sus componentes cartesianas

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z); \tag{3.2}$$

vemos que el momento después del choque será

$$\vec{p}' = (-p_x, p_y, p_z); \tag{3.3}$$

como se muestra en la figura 3.1. Por lo que la variación de momento será

$$\delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = (-2p_x, 0, 0). \tag{3.4}$$

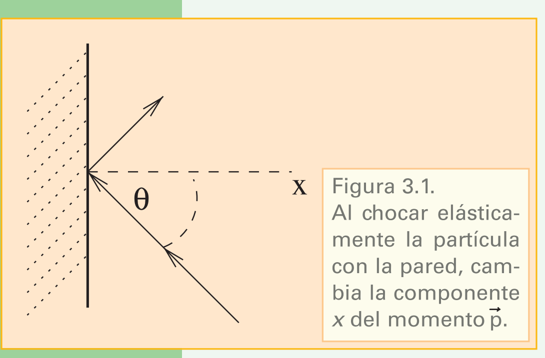


Figura 3.1.
Al chocar elásticamente la partícula con la pared, cambia la componente x del momento $\vec{p}$.

Notemos que

$$p_x = mv_x = mv\cos(\theta). \tag{3.5}$$

Denotemos con $\boldsymbol{n}'(v, d\Omega)$ el número de partículas por unidad de volumen con velocidad $\boldsymbol{v}$ provenientes del *elemento de ángulo sólido* $d\Omega$. Dado un origen $\boldsymbol{0}$, un elemento de ángulo sólido se puede pensar como una pequeña área en la esfera de direcciones alrededor de $\boldsymbol{0}$, que indica una pequeña zona de direcciones; como muestra la figura 3.2.

Como asumimos que el gas es isotrópico, o sea, que sus propiedades no dependen de las direcciones, se puede expresar

$$n'(v, d\,\Omega) = n_v \frac{d\Omega}{4\pi}\,; \tag{3.6}$$

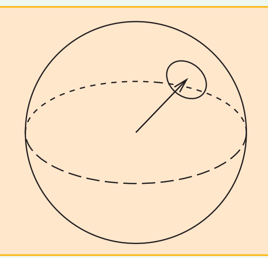


Figura 3.2.
La pequeña área sobre la esfera unidad, marca una zona de direcciones desde el origen.

donde n_v es el número total de partículas por unidad de volumen con velocidad v y el denominador 4π es, casualmente, la superficie de la esfera unidad; por lo que el cociente $\frac{d\Omega}{4\pi}$ es la relación entre la superficie del ángulo sólido $d\Omega$ y la superficie de la esfera unidad 4π.

Denotemos con A un elemento de superficie ubicado en la pared que limita al volumen. Deseamos expresar el volumen dV que encierra las partículas que chocarán con A en el intervalo de tiempo dt. En este lapso de tiempo, partículas con velocidad v recorren una distancia $\boldsymbol{l = v\ dt}$.

Por lo tanto las partículas que chocan sobre la superficie A están en un cilindro de altura $\boldsymbol{l = v\ dt}$ y sección $\boldsymbol{S = A\cos(\theta)}$; por lo que el volumen dV está dado por

$$dV = l\,S = vdt\,A\cos(\theta)\,; \tag{3.7}$$

donde el factor **cos**(θ) toma en cuenta que este haz de partículas incide sobre la pared con ángulo θ.

El cambio de momento, en este intervalo de tiempo, debido a estas partículas es

$$\begin{aligned} |d\vec{p}| = |\delta p| n'(v, d\,\Omega) dV &= 2\,mv\cos(\theta) n_v \frac{d\Omega}{4\pi} vdt\,A\cos(\theta) \\ &= 2mv^2\cos^2(\theta) n_v \frac{d\Omega}{4\pi} dt\,A\,; \end{aligned} \tag{3.8}$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{A}\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = 2\,mv^2\cos^2(\theta) n_v \frac{d\Omega}{4\pi}\,. \tag{3.9}$$

Luego, sumando sobre todas las direcciones, la *presión* sobre la pared, debida a las partículas con velocidad v, resulta

$$P_v = \frac{1}{3} mv^2 n_v. \tag{3.10}$$

La presión total debido a la contribución de todas las partículas con distintas velocidades, se estima por

$$P = \frac{n}{3} m < v^2 >\,; \tag{3.11}$$

donde el símbolo <> significa promedio y n es el número total de partículas por unidad de volumen.
Si V es el volumen, se tiene que el número total de partículas en dicho volumen es

$$N = nV\,; \tag{3.12}$$

por lo que se tiene

$$PV = \frac{N}{3} m < v^2 > \cdot \qquad (3.13)$$

Notando que la energía cinética media por partícula es

$$< E >= \frac{1}{2} m < v^2 > ; \qquad (3.14)$$

se obtiene

$$PV = \frac{2}{3} N < E > \cdot \qquad (3.15)$$

Esta ecuación nos da una relación entre la presión P, el volumen V, el número total de partículas N del gas ideal y la energía cinética media por partícula $< E >$ del mismo. Lo interesante de esta ecuación es que del lado izquierdo se tienen cantidades macroscópicas, mientras que del lado derecho las cantidades tienen información microscópica del sistema.
La rama de la física estadística es la que se encarga de relacionar la información microscópica del sistema con las variables macroscópicas.

Ejercicio 3.1 Se tiene un mol de un gas monoatómico, cuya masa atómica coincide con la del oxígeno molecular, encerrado en un volumen de 1 metro cúbico a una presión de una atmósfera[atm], esto es 101.325 pascales[Pa]. Notar que, usualmente, se usa la unidad de hectopascales para medir la presión atmosférica por lo que 1atm=1.013,25 hPa. Calcule la raíz cuadrada de la velocidad cuadrática media $v_c = \sqrt{< v^2 >}$.

Capítulo

4

Sistemas termodinámicos y la relevancia de la energía

4.1. La variable termodinámica fundamental: temperatura

4.1.1. Introducción a los sistemas termodinámicos

Imaginemos un sistema que consta de un bloque de madera de masa m que al tiempo $t = 0$ se mueve con velocidad v sobre un piso horizontal de baldosas y sobre el que no se ejercen otras fuerzas más que la de su propio peso y la interacción con el piso. Por la experiencia de la vida diaria sabemos que el bloque de madera se frenará, rápidamente, hasta detenerse por completo.

¿Qué es lo que ha sucedido desde un punto de vista mecánico?

Inicialmente, se tiene una energía cinética $E_i = \frac{1}{2} mv^2$. Como el movimiento se realiza siempre a la misma altura, no hay variación de la energía potencial; por lo que la energía mecánica total es E_i. Pero al tiempo final el bloque está en reposo, por lo que la energía mecánica final E_f es cero. Esto nos dice que, en este sistema, la energía mecánica no se ha conservado. Toda la energía mecánica inicial E_i se ha perdido.

¿Pero, realmente se ha perdido la energía?

La *energía mecánica* parece haber cambiado; pero es factible que se haya transformado en otra clase de energía.

Hasta aquí hemos estado considerando sistemas sencillos en los que era posible calcular la energía de los mismos. Pero en un trozo de materia común, como un bloque de madera, sabemos que intervienen muchísimos átomos que pueden estar formando moléculas complejas, las que, a su vez, forman estructuras macroscópicas que observamos con nuestros sentidos.

En la vida cotidiana, surge naturalmente la distinción entre el mundo microscópico, descripto por las propiedades moleculares y atómicas de los materiales, y el mundo macroscópico, que podemos observar con nuestros sentidos.

Volviendo al caso del bloque de madera que se desplaza sobre un piso horizontal de baldosas, vemos que en este movimiento hay una transferencia de energía del mundo macroscópico al mundo microscópico. En un estado normal, todo cuerpo muestra que sus constituyentes microscópicos, las moléculas o átomos en cuestión, no están en reposo, sino que tienen una agitación promedio. **Por ejemplo en el caso del gas ideal considerado en el capítulo anterior, vemos que existe una energía cinética media por partícula.**

Cuando uno frota dos superficies, normalmente, transfiere energía mecánica macroscópica, en mayor agitación de las moléculas de las superficies; las cuales a su

vez van transfiriendo esta agitación al resto de las moléculas vecinas. **Podemos hacer un experimento, en el cual luego de frotar dos superficies, nos resultarán más cálidas al tacto, que antes de comenzar el mismo. En particular, cuando sentimos frío, solemos frotar las manos contra la parte de la piel donde sentimos frío, para contrarrestar el mismo.**

Los cambios de agitación interna de los cuerpos pertenecen a la parte de la física que estudia los mismos, que se llama **termodinámica**.

Cuando se estudian sistemas termodinámicos, normalmente, se hace uso de pocas variables macroscópicas para determinar el *estado del sistema*.

Algunas de las variables termodinámicas que podemos usar para determinar los estados de los sistemas son: la presión P, el volumen V, la temperatura T y la energía interna U. El concepto de energía interna será estudiado en el próximo capítulo. **Notemos que cada vez que aparezca la temperatura en la descripción de un sistema, estamos en presencia de un sistema termodinámico; por lo que se suele decir que la temperatura es la variable fundamental de sistemas termodinámicos.**

Existe una noción básica importante en el estudio de los sistemas termodinámicos que introduciremos ahora. Un sistema termodinámico tal, que su entorno no cambia con el tiempo, alcanza un estado de equilibrio en el cual sus variables termodinámicas no cambian con el tiempo. A estos estados se los llama ***estados de equilibrio termodinámico***.

4.1.2. La temperatura

Sensaciones térmicas, termómetros, escalas termométricas. Cotidianamente, es normal obtener información de los noticieros sobre la temperatura del aire y el pronóstico de la variación de la misma. En particular, cuando las temperaturas son bajas, tenemos la sensación de frío en la piel, mientras que con temperaturas altas tenemos la sensación de calor. Sin embargo, nuestra piel no es un buen medidor de temperaturas. Esto lo podemos comprobar con el siguiente experimento:

Supongamos que llenamos dos jarras, una con agua caliente y otra con agua fría; de tal forma que no sea molesto introducir una mano en cada jarra. Luego de unos segundos, vertemos el contenido de las jarras en una olla y luego de un par de segundos introducimos las manos en la misma. Notaremos que la mano que estaba sumergida inicialmente en el agua fría, siente al agua tibia; mientras que la mano que estaba sumergida en el agua caliente siente al agua fresca. Esto es a pesar de que el agua en la olla tiene, aproximadamente, la misma temperatura en todas partes.

Es por ello que recurrimos a los termómetros para medir la temperatura. Los termómetros suelen usar alguna propiedad de los cuerpos que cambia con la temperatura para medir la misma. Una de estas propiedades es la de dilatación. Sólidos y líquidos muestran el efecto de dilatación; por medio del cual, cuando aumentamos la temperatura de los mismos, en general, aumentan sus dimensiones.

El agua sin embargo es un fluido excepcional, dado que muestra un máximo de densidad a 4 °C; por lo que desde 0 a 4 grados el volumen disminuye con el aumento de la temperatura.

Acabamos de usar la escala de grados centígrados °C, que acostumbramos emplear por aquí. Sin embargo, en física, se usa más frecuentemente la temperatura absoluta, o escala de Kelvin, con unidad K. Si T es la temperatura en la escala Kelvin y t

la misma temperatura en la escala centígrada, la relación entre estas dos escalas es:

$$T \equiv 273{,}03\ ^{\circ}C + t\ ; \qquad (4.1)$$

que denominaremos *temperatura absoluta*.
De ahora en más usaremos esta escala de temperaturas.
Se debe remarcar que el incremento de un grado centígrado coincide con el incremento de un grado Kelvin; es por ello que la ecuación anterior tiene sentido a pesar de que T tiene unidades de K.
La relevancia física de esta escala de temperaturas se estudiará en la próxima sección.

4.2 Gases ideales

4.2.1. Dependencia con la temperatura

Se denomina gas ideal a un fluido que cumple las leyes de Boyle-Mariotte y Gay Lussac.
Recordemos que la Ley de Boyle-Mariotte, debida a Robert Boyle y Edme Mariotte, es una ley fenomenológica que afirma que, si dos estados, digamos 1 y 2 de un gas, son tales que las temperaturas son iguales y la masa del gas permanece constante, entonces:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2\ ; \qquad (4.2)$$

o sea, el producto de presión por volumen en el estado 1 coincide con el producto de presión y volumen en el estado 2.
Observaciones más precisas, demostraron que esta ley observacional no se cumple exactamente para los distintos gases reales; sin embargo, se cumple exactamente en el régimen asintótico de altas temperaturas y bajas densidades. Por lo tanto es legítimo tomarla para definir una clase de gas ideal.
Por otro lado recordemos que la ley de Gay-Lussac, frecuentemente también llamada ley de Charles, es una ley fenomenológica que afirma que si dos estados, digamos 1 y 2, de un gas son tales que las presiones son iguales y la masa del gas permanece constante entonces:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}\ . \qquad (4.3)$$

La primera discusión de esta ley se le atribuye a Jacques Charles cerca del 1787. Pero la primera publicación de la misma fue realizada por Louis Joseph Gay-Lussac en 1802. Observaciones más precisas, demostraron que esta ley observacional no se cumple, exactamente, para los distintos gases reales; sin embargo, como en el caso anterior se cumple exactamente, en el régimen asintótico de altas temperaturas y bajas densidades. Por lo tanto también es legítimo tomarla para definir una clase de gas ideal.
Un estudio detallado de estas dos leyes muestra que la dependencia de presión P y volumen V con la temperatura está expresada por la siguiente ecuación:

$$PV = CT\ ;$$

donde estamos denotando con C una constante que no depende de la temperatura; por lo que, solamente, puede depender de la cantidad de materia del gas.

4.2.2. Ecuación de estado de los gases ideales

Manteniendo V y T constantes queda claro que la presión debe ser proporcional al número de moles n del gas; dado que a más partículas, mayor presión, con una clara dependencia lineal.
Por lo tanto debe ser

$$\boxed{PV = nRT}; \qquad (4.4)$$

donde ahora R no puede depender ni de la temperatura ni de la cantidad de materia; en otras palabras R tiene que ser la misma constante para todo gas ideal. A R se la denomina *la constante universal de los gases ideales*, cuyo valor mostramos más abajo.
Esta ecuación constituye una ecuación de estado de los gases ideales.
Existe otra forma de expresar esta ecuación de estado. Notemos que en 1 mol hay N_A moléculas; donde N_A denota el número de Avogadro, cuyo valor mostramos más abajo. Luego en n moles tenemos $N = n\, N_A$ moléculas; por lo que se puede escribir

$$PV = \frac{N}{N_A} RT = Nk_B T; \qquad (4.5)$$

donde hemos definido la constante

$$k_B = \frac{R}{N_A}; \qquad (4.6)$$

llamada constante de Boltzmann. Luego también podemos expresar

$$\boxed{PV = Nk_B T}; \qquad (4.7)$$

para la ecuación de estado de los gases ideales.
Los valores de estas constantes son:

$$\begin{aligned} R &= 8{,}314472 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}, \\ N_A &= 6{,}02214179 \times 10^{23}, \\ k_B &= 1{,}3806504 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}. \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Recordemos que del estudio microscópico de los gases ideales obtuvimos

$$PV = \frac{2}{3} N < E >; \qquad (3.15)$$

donde $< E >$ es la energía cinética media de una partícula. Comparando con la ecuación de los gases ideales se deduce la relación

$$< E > = 3\frac{k_B T}{2}; \qquad (4.9)$$

que se puede interpretar como que hay una contribución $\frac{k_B T}{2}$ por cada grado de libertad del microsistema. En este caso el microsistema es una partícula que tiene 3 grados de libertad. Los grados de libertad de un sistema son el número de coordenadas necesarias para determinar un estado en el espacio de configuraciones del sistema.

Ejercicio 4.1 Asumiendo que el aire fuese un gas monoatómico, para simplificar, ¿cuántas moléculas hay en un metro cúbico de aire, a una atmósfera de presión, esto es 101.325 Pa, a 20 °C, asumiendo que el aire fuese un gas monoatómico, para simplificar?
¿Cuál sería la velocidad cuadrática media v_c bajo estas condiciones?

4.2.3. Positividad de la temperatura absoluta

Conviene remarcar que:

1. a volumen constante cuando la temperatura tiende a cero, la presión tiende a cero;
2. a presión constante cuando la temperatura tiende a cero, el volumen tiende a cero; además,
3. cuando la temperatura tiende a cero la energía cinética media por partícula tiende a cero que, en forma abreviada, se puede expresar por:

- a volumen constante: $(T \to 0) \Rightarrow (P \to 0)$;
- a presión constante: $(T \to 0) \Rightarrow (V \to 0)$;
- $(T \to 0) \Rightarrow (< E > = < ½\, mv^2 > \to 0)$.

De todas éstas se deduce que la temperatura absoluta no puede ser negativa y que el cero absoluto no se puede traspasar.
Cuando enfriamos un material al cero absoluto, se ha quitado toda la energía disponible para la agitación térmica y las moléculas están ‘en reposo’. Llegado a este punto, ya no es posible seguir enfriando al sistema.

Capítulo 5

Primer principio de la termodinámica

Con el objeto de presentar la formulación del primer principio de la termodinámica, se necesita introducir algunos conceptos básicos primeramente.

5.1. Paredes adiabáticas

Se denominan fronteras o paredes adiabáticas a aquellas tales que el estado del sistema puede ser cambiado sólo moviendo las paredes o poniendo al sistema en un campo externo de fuerzas (como un campo eléctrico, gravitatorio, etc.).
En contraposición diremos que una pared es *diatérmica* si es posible cambiar el estado del sistema sin mover las paredes.

5.2. Energía interna

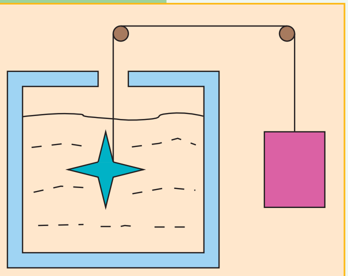


Figura 5.1.
Ejemplo de trabajo adiabático. Un recipiente de paredes adiabáticas contiene un líquido. Este es revuelto por medio de un molinete que es accionado por una pesa que baja en el campo gravitatorio terrestre.

Denominaremos *trabajo adiabático,* al trabajo realizado cuando el sistema está rodeado por paredes adiabáticas.
Un ejemplo de trabajo adiabático se muestra en la figura 5.1.
En este ejemplo, el trabajo mecánico externo es usado para cambiar el estado termodinámico del sistema (el líquido).
Es un hecho experimental que, dado un sistema termodinámico, siempre se puede conectar dos estados del mismo por medio de un proceso donde sólo intervenga trabajo adiabático.
Dados dos estados termodinámicos, digamos A y B, se puede llevar al sistema de A a B por varias trayectorias adiabáticas, en el espacio de estados de equilibrio. En este sentido, estamos usando la imagen geométrica de una trayectoria en el espacio de estados de equilibrio para señalar una transformación termodinámica.

Un hecho observacional importante es que: el trabajo adiabático realizado para llevar al sistema de un estado inicial a otro final, sólo depende de dichos estados. O sea, para toda trayectoria adiabática, que une A con B, el trabajo adiabático realizado es el mismo.

Este hecho nos permite definir un escalar **U** que sólo depende de los estados de equilibrio termodinámico. Dados el estado inicial A y el estado final B definimos

$$\mathbf{U}(B) - \mathbf{U}(A) = W_{ext.}\big|_{\text{adiab.}}; \qquad (5.1)$$

o sea, la diferencia del escalar **U** evaluado en B, menos el evaluado en A, está dada

por el trabajo externo realizado a lo largo de un proceso adiabático que lleva al sistema del estado A al B. Al escalar $\mathbf{U}$ se lo llama *energía interna*.
Normalmente, se prefiere usar la noción del trabajo hecho por el sistema, en vez de usar la noción de trabajo externo. Denotando con W al trabajo hecho por el sistema, vemos que uno es menos el otro, por lo que vale $W = -W_{ext}$. Esto quiere decir que podemos expresar la relación anterior por:

$$\mathbf{U}(B) - \mathbf{U}(A) = -W|_{\text{adiab.}}. \qquad (5.2)$$

5.3. Primer principio de la termodinámica

Pensemos ahora en la situación mediante la cual llevamos al sistema del estado A al B, pero donde no usamos paredes adiabáticas, como se indica en la figura 5.2. En este caso el sistema realiza un trabajo W, que no es un trabajo adiabático; por lo que no coincidirá con $\mathbf{U}(B) - \mathbf{U}(A)$.
La exigencia de la conservación de la energía en este proceso implica que existe una cantidad de energía Q, absorbida por el sistema, tal que se satisface

$$\boxed{\mathbf{U}(B) - \mathbf{U}(A) = Q - W}\; ; \qquad (5.3)$$

donde a la cantidad Q se la llama *calor*. A esta afirmación se la conoce como *primera ley de la termodinámica* o *primer principio de la termodinámica*.

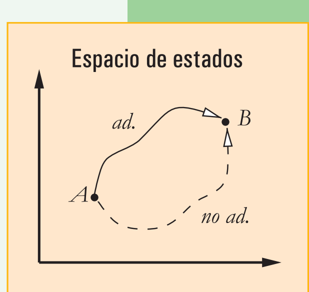


Figura 5.2.
En este gráfico se indican, en el espacio de estados termodinámicos, un estado inicial A y un estado final B. El camino superior indica un proceso donde se usan paredes adiabáticas; mientras que el camino inferior, con línea de trazos, indica un proceso general donde el trabajo es no-adiabático.

Para fijar ideas conviene enfatizar algunos puntos:
- el primer principio de la termodinámica no es otra cosa que la ley de conservación de la energía para sistemas termodinámicos;
- el calor es una forma de energía; es más, se podría decir que es energía en tránsito (microscópico);
- el calor representa ganancia o pérdida de energía por medios distintos a la realización de trabajo;
- las paredes adiabáticas impiden el paso del calor;
- dado que la energía interna $\mathbf{U}$ es una función de estado, su variación del estado inicial A al estado final B no depende de la transformación (proceso) termodinámica que se emplee;
- el calor Q **no es** una función de estado, por lo que su variación depende del proceso termodinámico;
- el trabajo W hecho por el sistema **no es** una función de estado, por lo que su variación depende del proceso termodinámico.

De estas observaciones se desprende que es incorrecto hablar del calor de un cuerpo o un estado, o referirse al trabajo de un cuerpo o un estado.

5.4. Nota histórica

El concepto de calor entendido como una forma de energía ha tenido una larga evolución histórica. Comentaremos los aportes y un poco de la biografía de Benjamin Thompson, quien más tarde se llamó también Conde Rumford de Baviera. Benjamin Thompson, Jr. 1753-1814

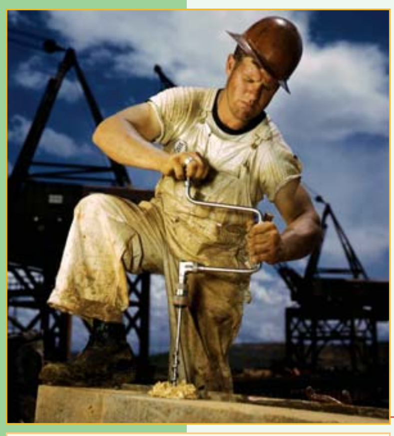


Figura 5.3.
El trabajo realizado por un taladro produce calor en el material sobre el que se aplica el trabajo.

[Sew68, Res08] nació el 26 de marzo de 1753 en Woburn, Massachusetts, Estados Unidos, y fue un científico e inventor. Contribuyó al entendimiento de la naturaleza del calor. En 1776 se traslada a Inglaterra; viajando con los soldados ingleses que evacuaban Boston. En 1783 conoce al príncipe Maximiliano y por su intermedio obtiene trabajo en la Corte del Elector de Baviera. Posteriormente, regresa a Londres donde da a conocer sus técnicas para mejorar las chimeneas de los hogares. Thompson observó que en el proceso de fabricación de los cañones, estos permanecían calientes mientras proseguía el proceso de taladrar los mismos. Llegó a la conclusión que el trabajo mecánico de taladrar era lo que producía calor. También hizo un cálculo de la equivalencia mecánica del calor.

5.5. Móvil perpetuo de primera especie

Con frecuencia se dice que el primer principio de la termodinámica impide la posibilidad de construir un *móvil perpetuo de primera especie*. Entenderemos por móvil perpetuo de primera especie un dispositivo o máquina, capaz de realizar procesos cíclicos indefinidamente, que produce trabajo externo sin necesidad de energía externa adicional.
Un *proceso cíclico* es una transformación termodinámica donde el estado inicial y final coinciden. Entonces en un proceso cíclico la energía interna no cambia; dado que la energía interna es una función de estado y al cabo de un ciclo se ha vuelto al estado inicial.

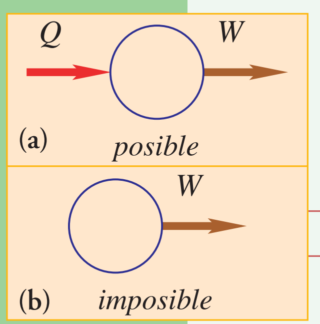


Figura 5.4.
El gráfico nos muestra dos procesos cíclicos denotados por los círculos celestes. El de arriba (a) es posible, pues satisface la primera ley de la termodinámica; esto es, la entrada de calor *Q* es balanceada por la producción de trabajo *W*. El de abajo, representa un móvil perpetuo de primera especie y contradice la primera ley de la termodinámica.

5.6. Capacidad calorífica, la caloría

Si al adquirir una cantidad de calor ΔQ, que puede ser negativa, el sistema muestra un cambio de una temperatura inicial T_i a otra final T_f, se define la capacidad calorífica media $\bar{C}$ del sistema a la relación

$$\bar{C} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}; \qquad (5.4)$$

donde estamos usando $\Delta T = T_f - T_i$.
En el límite de que tanto ΔT como ΔQ tienden a cero, se obtiene la noción de capacidad calorífica C; o sea,

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \qquad (5.5)$$

El alumno Jaimito le pregunta al profesor de termodinámica: "Profesor, profesor, ¿qué pasa cuando uno considera un proceso isotérmico?" El profesor tose un par de veces y le dice a Jaimito:"¡Siempre haciendo preguntas fuera de lugar!"

Es conveniente enfatizar que como el calor no es una función de estado, se debe siempre especificar el tipo de proceso que se tiene en mente. Es usual considerar procesos a volumen constante o a presión constante.
A la cantidad de calor necesaria para aumentar de 14,5 °C a 15,5 °C un gramo de

agua a la presión de una atmósfera se le llama *caloría* y se la denota por 'cal'. Es muy frecuente usar las calorías como unidades de calor y por lo tanto para capacidades caloríficas. En otras ocasiones se usa también la kilocaloría que denota por 'Cal'.
Las mediciones que determinan el equivalente mecánico del calor establecen que

$$1\text{cal} = 4{,}1858 \text{ J} ; \qquad (5.6)$$

donde J denota un joule, la unidad de energía.
Para conversiones entre distintas unidades ver: http://physics.nist.gov/Pubs/SP811/appenB8.html
Recordemos que un joule es igual a $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$. Notar que existen otras definiciones de 'caloría', por lo que se debe estar atento cuando se lee un texto a cuál de ellas se refiere.

5.7. Nota histórica

James Prescott Joule (1818-1889) nació [Ab05] el 24 de diciembre de 1818 en Inglaterra. Su familia tenía una fábrica de cerveza, por lo que él también se dedicó a la misma.
Fue enviado para que estudiara con John Dalton. Mostró mucho interés en los fenómenos electromagnéticos. Construyó un laboratorio en su propia casa para llevar a cabo experimentos.
Realizó una serie de experimentos que establecieron la equivalencia mecánica del calor; sentando así las bases para una formulación del primer principio de la termodinámica.
También estudió física molecular y contribuyó a una descripción de la velocidad del sonido en el aire.

5.8. Calores específicos

En el estudio de la termodinámica se suelen distinguir entre cantidades globales que varían con la cantidad de materia, a las que se llaman *variables extensivas* y cantidades puntuales que no varían con la cantidad de materia, denominadas *variables intensivas*. Ejemplos de variables extensivas son el volumen V, la cantidad de masa m o el número de moles n. Mientras que los ejemplos de las cantidades intensivas son la presión P y la temperatura T.
La capacidad calorífica definida, anteriormente, constituye entonces una cantidad extensiva. Sin embargo, es posible definir una cantidad intensiva si dividimos por la cantidad de masa del sistema. Así se llega a la noción de calor específico.
Se define la *capacidad calorífica molar c* de una sustancia a la relación

$$c = \frac{C}{n} ; \qquad (5.7)$$

donde C es la capacidad calorífica, n es el número de moles y cuyas unidades son J/(mol K).
Se suele usar, indistintamente, el término *capacidad calorífica específica* o *calor específico*; por lo que también nos podemos referir al calor específico molar c.

5.8.1. Calor específico de los gases ideales

Hemos visto que la ecuación de estado de los gases ideales se puede expresar por

$$\boxed{PV = Nk_BT} ; \qquad (4.7)$$

donde recordemos que N es el número total de partículas.

Además, hemos visto, en el estudio de la presión del gas ideal, que

$$PV = \frac{2}{3} N < E > \cdot \qquad (3.15)$$

De esta última expresión vemos que en un gas ideal sólo se cuenta con la energía cinética media por partícula; dado que no se consideran posibles energías potenciales. Luego, la energía interna **U** debe ser

$$\mathbf{U} = N < E > = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} nRT; \qquad (5.8)$$

donde en la última expresión hemos usado el número de moles n. Esta última constituye una ecuación de estado para el gas ideal involucrando la energía interna.
Para calcular el calor específico molar de los gases ideales podemos hacer uso del primer principio de la termodinámica que indica que una variación de calor ΔQ se puede expresar por medio de

$$\Delta Q = \Delta \mathbf{U} + P \Delta V . \qquad (5.9)$$

En particular, para un proceso a volumen constante, el último término no contribuye, por lo que el calor específico del gas ideal a volumen constante c_V está dado por

$$c_V = \frac{C_V}{n} = \frac{1}{n} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{3}{2} R . \qquad (5.10)$$

Similarmente, podemos calcular el calor específico molar de los gases ideales a presión constante c_P , obteniéndose

$$c_P = c_V + R = \frac{5}{2} R . \qquad (5.11)$$

Vemos, entonces que, para los gases ideales la relación entre c_P y c_V es un número sin unidades cuyo valor es

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3} = 1{,}66666666 \; ; \qquad (5.12)$$

donde la cantidad de seis en el último número es indefinida.

5.9. Propagación del calor

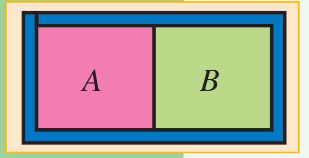


Figura 5.5.
El cuerpo A está en contacto térmico con el cuerpo B. Ambos cuerpos están a su vez rodeados de paredes adiabáticas.

Hemos visto que el calor es energía. Por medio de la propagación del calor de un cuerpo a otro es que se puede alcanzar el equilibrio térmico. Existen diversas formas de propagación del calor. En lo que sigue veremos ejemplos de *conducción de calor, convección de calor* y *radiación de calor.*

5.9.1. Conducción del calor

En la figura 5.5 se muestra un cuerpo A que, inicialmente, está a una temperatura mayor que el cuerpo B; que está en contacto a su lado derecho. Ambos sistemas están rodeados por paredes adiabáticas. Con el correr del tiempo, observaremos que se propaga calor por conducción del cuerpo A hacia el cuerpo B; de tal forma que si esperamos lo suficiente, finalmente se observará la misma temperatura en ambos siste-

mas. En esta situación diremos que se ha alcanzado el equilibrio térmico del sistema.
Para hacer un experimento que se asemeje a esta situación ideal, podemos tomar dos ladrillos. A uno lo ponemos al sol en el piso, para que se caliente (eleve su temperatura). Al otro lo mantenemos a la sombra. Luego de que el primer ladrillo se ha calentado, los ponemos uno al lado del otro, pero envueltos en una manta de lana. Al cabo de unos quince minutos desenvolvemos los ladrillos y notaremos que su temperatura es mayor que la ambiente y similar entre ellos.
La conducción del calor es diferente en distintas sustancias. Por ejemplo, un cuerpo de madera conduce con más dificultad el calor que un cuerpo de la misma geometría, pero de metal. Es por ello que decimos que la madera es mala conductora del calor y los metales buenos conductores del calor.
Hay una observación que podemos hacer fácilmente. Es probable que esté en una habitación donde se encuentre un objeto de madera y otro de metal; por ejemplo una puerta de cedro y su correspondiente picaporte. Normalmente, ambos objetos estarán a la misma temperatura; sin embargo si la temperatura ambiente es fresca y tocamos el objeto de madera y al objeto de metal, sentiremos al último más fresco. En cambio si los dos objetos están bajo la luz del sol, sentiremos al metal más cálido que la madera. Esto se entiende del hecho que nuestra piel es sensible al paso del calor y no a la temperatura. En la primera situación el metal nos extrae más calor que la madera; en el segundo caso el objeto de metal nos entrega más calor que el objeto de madera.

5.9.2. Convección del calor

Cuando las sustancias involucradas son fluidas se pueden tener procesos complicados. Pensemos, por ejemplo, en el aire encerrado en una habitación que es calentada por un calefactor radiador por el que circula algún líquido caliente. Un ejemplo son los calefactores radiadores, como el mostrado en la figura 5.6. Otro ejemplo son los calefactores radiadores eléctricos que contienen aceite.
En la figura 5.7 se esquematiza una habitación donde en su lado derecho hay un calefactor radiador. El radiador, al alcanzar una temperatura elevada, calienta el aire circundante; el que por lo tanto se expande y disminuye su densidad. Al hacerse más liviano, este aire provoca un movimiento convectivo, de tal forma que el aire en las cercanías del calefactor asciende, provocando una circulación como muestran las flechas. De esta forma, se transporta aire caliente por convección por la habitación y así se calientan los cuerpos dentro de ella, como mesa y silla que pueden estar en ella.



Figura 5.6. Ejemplo de un radiador por el que circula agua caliente.

5.9.3. Radiación del calor

Radiación electromagnética
Es preciso, primeramente, decir unas palabras sobre la *radiación electromagnética*. Dependiendo del tipo de observación que se realice, la *radiación electromagnética* se puede entender de dos formas:

a) como fenómeno ondulatorio,
b) como lluvia de fotones (los fotones son partículas que viajan a la velocidad de la luz).

Un ejemplo de *radiación electromagnética* como fenómeno ondulatorio puede ser la recepción de un aparato de radio, de una emisora que transmite en la llamada banda de onda larga. Por ejemplo Radio Universidad en

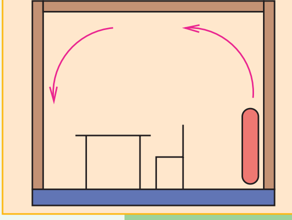


Figura 5.7.
Esquema de una habitación con un calefactor radiador sobre el lado derecho de la misma. El movimiento del aire es más o menos como indican las flechas curvas.

la ciudad de Córdoba transmite con una frecuencia de 580 kilociclos por segundo. Frecuencia ν y longitud de onda λ son números características de una onda. Para los fenómenos electromagnéticos estos números están relacionados por la ecuación

$$c = \nu\lambda\,; \qquad (5.13)$$

donde c es la velocidad de las interacciones electromagnéticas, también llamada velocidad de la luz en el vacío.

La descripción de los fenómenos electromagnéticos en el mundo atómico es realizada en vez por medio del concepto de fotón. El fotón es una partícula que porta energía E. De tal forma que se puede hablar de frecuencia asociada a un fotón por medio de la ecuación



Figura 5.8. Atardecer en la laguna Mar Chiquita.

$$E = h\,\nu\,; \qquad (5.14)$$

donde h es una constante universal llamada *constante de Planck*. Esta constante aparece en la descripción de los fenómenos cuánticos.

En la figura 5.8 se muestra una foto que el autor tomó en un atardecer en la laguna Mar Chiquita. El fenómeno de calentamiento del sol sobre la superficie terrestre es un ejemplo de radiación del calor. En lo que sigue estudiaremos la naturaleza de este fenómeno.

Radiación térmica

Todo cuerpo, con temperatura $T > 0$, emite *radiación electromagnética*. Esto quiere decir que, incluso a temperatura ambiente, los cuerpos están constantemente emitiendo y absorbiendo radiación de los otros cuerpos circundantes. Esta entrada y salida de energía puede o no estar balanceada.

La velocidad con la cual un cuerpo emite energía radiante depende del tamaño de la superficie, de su temperatura y de la naturaleza de la supeficie.

La potencia radiante total $\mathcal{P}$ emitida por unidad de superficie se llama *emitancia radiante* del cuerpo.

Una radiación incidente se dice isótropa si tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.

La radiación isótropa sobre un cuerpo puede ser en parte absorbida, en parte reflejada y en parte transmitida.

La fracción de la radiación incidente isótropa de todas las longitudes de onda que es absorbida puede depender de la temperatura y de la naturaleza de la superficie del cuerpo. A la relación α entre la radiación absorbida y la incidente se le llama *coeficiente de absorción*; por lo que el valor máximo de α es uno.

A la substancia ideal que es capaz de absorber toda la radiación térmica incidente sobre su superficie se le llama *cuerpo negro*; por lo que el cuerpo negro tiene coeficiente de absorción

$$\alpha_N = 1. \qquad (5.15)$$

Si construimos una caja cúbica de unos 30 cm de lado, con un material opaco, a la que se le hace un pequeño orificio, digamos de no más de un centímetro de diámetro, veremos que el orificio se presenta muy oscuro. Esto se debe a que la poca radiación entrante es reflejada entre las caras interiores de la caja, escapando sólo una pequeña cantidad de la radiación incidente en el orificio. Es así que la superficie del orificio de la caja, se comporta, para la radiación diurna, como la superficie de un cuerpo negro. Notemos que en esta observación, no se ha tomado en cuenta el detalle

de la naturaleza de las paredes, sólo hemos pedido que sean opacas.

Cavidad en equilibrio térmico, radiación de cuerpo negro

Consideremos, ahora, una cavidad cerrada en equilibrio térmico cuyas paredes están a temperatura T.

Denotemos con $\mathcal{I}$ a la *irradiación* dentro de la caja; esto es, a la energía radiante que incide por unidad de tiempo sobre la unidad de área.

La figura 5.9 indica la situación de una cavidad cuyas paredes están a temperatura T, que contiene a un cuerpo negro que también está a temperatura T. Como tanto las paredes como el cuerpo negro están a la misma temperatura T, estamos en situación de equilibrio térmico y la irradiación $\mathcal{I}$ es la misma que cuando no estaba el cuerpo negro.

En esta situación, la cantidad de potencia radiante absorbida por el cuerpo negro será

$$\alpha_{\mathcal{N}}\mathcal{I} = \mathcal{I}; \qquad (5.16)$$

mientras que la potencia radiante emitida por el cuerpo negro será

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}}. \qquad (5.17)$$

Como estamos asumiendo la situación de equilibrio térmico, estas dos cantidades se deben compensar; pues de otra manera la temperatura del cuerpo negro variaría con el tiempo. Por lo tanto se tiene:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}} = \mathcal{I}; \qquad (5.18)$$

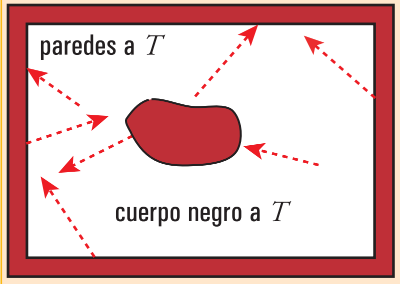


Figura 5.9.
La figura muestra el esquema de una cavidad cuyas paredes están a temperatura T. En su interior se encuentra un cuerpo negro que también está a temperatura T. Las flechas rojas indican la posible trayectoria de fotones termalizados.

o sea, la emitancia radiante de un cuerpo negro a temperatura T coincide con la irradiación dentro de una cavidad cuyas paredes están a la misma temperatura. Es por ello que la radiación dentro de una cavidad se le llama radiación de cuerpo negro.

No hemos tomado en cuenta el detalle del material de las paredes para llegar a esta conclusión, por lo que se deduce que la emitancia radiante de un cuerpo negro $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$ sólo es función de la temperatura.

Ley de Kirchhoff

Supongamos ahora la situación en que un cuerpo general, no negro, es introducido en una cavidad a temperatura T. En el equilibrio térmico, el cuerpo también está a la misma temperatura. Debido a que el sistema está en equilibrio térmico, la irradiación en su interior, sigue siendo $\mathcal{I}$; dado que estamos considerando la misma temperatura T que en el caso anterior.

El coeficiente de absorción del cuerpo no negro es α; por lo que la potencia radiante absorbida por unidad de área es

$$\alpha\mathcal{I}; \qquad (5.19)$$

mientras que la potencia radiante emitida por unidad de área la denotamos por

$$\mathcal{P}. \qquad (5.20)$$

En la situación de equilibrio térmico estas dos cantidades deben coincidir por lo que tenemos

$$\mathcal{P} = \alpha\mathcal{I}. \qquad (5.21)$$

En el caso anterior del cuerpo negro habíamos hallado que la emitancia radiante de

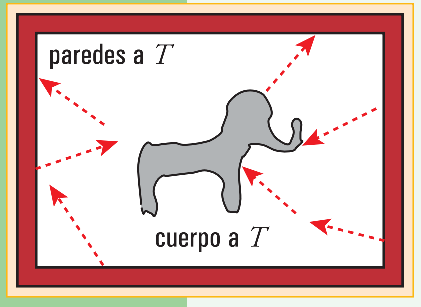


Figura 5.10.
La figura muestra el esquema de una cavidad cuyas paredes están a temperatura T. En su interior se encuentra un cuerpo no negro que también está a temperatura T. Las flechas rojas indican la posible trayectoria de fotones termalizados.

un cuerpo negro a temperatura T coincide con la irradiación dentro de una cavidad cuyas paredes están a la misma temperatura, dado por la ecuación (5.18); por lo que finalmente tenemos

$$\mathcal{P} = \alpha \mathcal{P}_{\mathcal{N}}. \tag{5.22}$$

Esta ecuación establece que la emitancia radiante de cualquier cuerpo, a una temperatura dada, coincide con el producto del coeficiente de absorción de dicho cuerpo por la emitancia radiante de un cuerpo negro a dicha temperatura. A esta afirmación se la conoce como ley de Kirchhoff.

Ley de Stefan-Boltzmann, aplicaciones

De lo anterior, hemos visto que la emitancia radiante de un cuerpo negro $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$ debe depender sólo de la temperatura, pero no hemos determinado todavía esa dependencia. Se comprueba experimentalmente y se puede deducir teóricamente también que la relación funcional está dada por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(T) = \sigma T^4; \tag{5.23}$$

donde σ es una constante. A esta relación se la conoce como ley de Stefan-Boltzmann y σ es la constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor es:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5,67040 \times 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}; \tag{5.24}$$

donde distinguimos la constante de Boltzmann k_B, la velocidad máxima de las interacciones c, la constante de Planck h y estamos usando la letra W para indicar la unidad de watt, o sea W=J/s.

Si colocamos un pequeño cuerpo a temperatura T en un ambiente vacío, cuyas paredes están a temperatura T_0, estaremos en una situación fuera de equilibrio. Para fijar ideas supongamos que $T < T_0$. Luego si la superficie total del cuerpo es A absorberá la potencia

$$A\alpha(T)\mathcal{I}(T_0); \tag{5.25}$$

y perderá por la misma superficie la potencia

$$A\mathcal{P}(T); \tag{5.26}$$

por lo que el calor neto absorbido por unidad de tiempo será

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = A\left(\alpha(T)\mathcal{I}(T_0) - \mathcal{P}(T)\right). \tag{5.27}$$

Aquí podemos usar todo lo que hemos visto antes; esto es, que $\mathcal{I}(T_0) = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(T_0)$, que $\mathcal{P}(T) = \alpha(T)\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(T)$; por lo que

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = A\alpha(T)\left(\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(T_0) - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(T)\right) = A\,\alpha(T)\,\sigma\left(T_0^4 - T^4\right). \tag{5.28}$$

Queda claro que el signo de esta expresión depende de la relación entre las temperaturas; para el ejemplo que estamos considerando es positivo.

Ejercicio 5.1 Considerando al Sol como una esfera de rS = 696.000 km de radio, que se comporta como un cuerpo negro a T = 5.775 K. Tomando en cuenta que la distancia media Tierra-Sol es la unidad astronómica (ua), 1ua = $1{,}496 \times 10^{11}$m.

Estimar la energía radiante que incide por metro cuadrado sobre la superficie exterior terrestre.

5.9.4. Enfriamiento de los cuerpos

Si colocamos un cuerpo de temperatura T, en un ambiente con temperatura T_a , siendo T mayor que la temperatura ambiente T_a , el cuerpo perderá calor por su superficie de tal forma que su temperatura irá disminuyendo con el tiempo hasta alcanzar la temperatura ambiente.
En general, el enfriamiento será consecuencia de varios mecanismos, dependiendo de la situación. Si las diferencias de temperatura son importantes, los efectos de convección y radiación pueden jugar un rol determinante. En situaciones normales de la vida cotidiana, el mecanismo suele ser gobernado por la conducción del calor del cuerpo al medio circundante.
Con la intención de disminuir este efecto, uno debe rodear al cuerpo en cuestión por paredes malas conductoras del calor.
En la fabricación de los termos, se intenta lograr esta situación; con el objeto de mantener la temperatura de los líquidos en su interior. La mayoría de los termos incluyen un compartimiento vacío que separa al cuerpo del exterior; con el objeto de disminuir la conducción calorífica.

5.10. Aplicaciones del primer principio

5.10.1. Dos cuerpos rodeados por paredes adiabáticas

Supongamos dos cuerpos A y B que están rodeados por paredes adiabáticas. Para fijar ideas podemos pensar que son gases. El sistema compuesto parte de un estado inicial i y termina en un estado final f. Para cada cuerpo vale el primer principio de la termodinámica por lo que tenemos

$$\mathbf{U}_{Af} - \mathbf{U}_{Ai} = Q_A - W_A \qquad (5.30)$$

$$\mathbf{U}_{Bf} - \mathbf{U}_{Bi} = Q_B - W_B\,; \qquad (5.31)$$

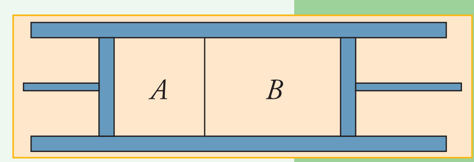


Figura 5.11.
Ejemplo de un sistema compuesto rodeado por paredes adiabáticas. Los extremos se pueden pensar como pistones que puede cambiar su posición.

pero como el conjunto de los dos sistemas están rodeados por paredes adiabáticas, (figura 5.11) el calor total del sistema AB debe ser cero; esto es

$$0 = Q_A + Q_B\,; \qquad (5.32)$$

y

lo que indica que el calor absorbido por uno de los cuerpos debe ser el calor perdido por el otro; en esta situación. Más concretamente se tiene:

$$Q_A = -Q_B\,. \qquad (5.33)$$

Y la aplicación del primer principio al sistema compuesto es, en este caso:

$$(\mathbf{U}_{Af} + \mathbf{U}_{Bf}) - (\mathbf{U}_{Ai} + \mathbf{U}_{Bi}) = -(W_A + W_B); \qquad (5.34)$$

5.10.2. Cuerpo humano: relación entre trabajo físico y consumo energético

Gasto de energía en una sesión en un gimnasio con aparatos
Realicemos una estimación del gasto energético de una persona que realiza una sesión de gimnasia con aparatos de pesas. En vez de hacer un cálculo preciso realizaremos un cálculo aproximado.
Un ejercicio típico bastante demandante es el levantamiento de pesas desde una banca, desde la posición de acostado, para ejercitar los músculos pectorales. Supongamos que la persona levanta una masa m = 40 kg una altura h de 50 cm en cada movimiento; realizando 12 movimientos en cuatro series. Tenemos que tomar en cuenta que el ejercicio se realiza en presencia de la aceleración gravitatoria terrestre g de 9,8 m/s^2. Supongamos que entre cada serie descansa un poco, tomando unos 6 minutos para realizar todo el ejercicio. Si se ejercita por una hora realizando otros ejercicios, pero gastando energía al mismo ritmo, habrá realizado el trabajo

$$W = m g\ h \times 12 \times 4 \times 10 = 40\ \text{kg}\ 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ 0{,}5\ \text{m}\ \ 480 = 94.080\ J. \quad (5.35)$$

¿A cuánto equivale esta cantidad en término del contenido energético de los alimentos? Normalmente, en los alimentos empaquetados viene especificado el contenido energético de los mismos; por ejemplo en el paquete de una barrita de cereal de 23 g se indica que su equivalente energético es de 104 Cal. Debemos remarcar que una Cal es equivalente a 1.000 cal.
Anteriormente hemos visto que el equivalente mecánico del calor está dado por la ecuación (5.6), por lo que la sesión ejercicios mencionado anteriormente equivale a

$$\text{W} = \frac{94.080}{4{,}1858}\ \text{cal} = 22{,}476\ \text{Cal}\,; \quad (5.36)$$

lo cual parece una cantidad pequeña, cuando se la compara con cualquier ingesta de comida normal.
Notemos que cantidades normales para la alimentación de un hombre por día, son alrededor de 2.200 Cal; mientras que para una mujer son alrededor de 1.800 Cal. Estos son sólo números indicativos, dado que cada persona consume en función del tamaño de su cuerpo, de la actividad llevada a cabo durante el día, del clima, etc.

Gasto energético en una trepada en bicicleta
Supongamos un ciclista de 90 kg que en un paseo en bicicleta realiza una trepada de 600 m. El trabajo realizado es

$$\text{W} = 90\ \text{kg}\ 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ 600\ \text{m} = 529.200\ \text{J} = 126{,}421\ \text{Cal}. \quad (5.37)$$

Nuevamente parece un número relativamente pequeño en comparación con el contenido energético, digamos, de un almuerzo.
No todo es balance energético
Hemos visto que, en realidad, cuando realizamos ejercicios físicos relativamente duros, no se gasta mucha energía, si la comparamos con la ingesta de un almuerzo, o una cena normal. Sin embargo, mucha gente realiza ejercicio físico con la idea de controlar o bajar de peso; pensando que la realización del ejercicio forzará al organismo a "quemar las grasas" que están en exceso.
El equivalente de 10 g de manteca en calorías es de 64 Cal y el de 15 g de aceite de

maíz es de 122 Cal.
Vemos entonces que habría que realizar muchísimo ejercicio para "quemar", digamos 100 g de grasa.
Las justificaciones para realizar ejercicios, entonces deben venir por otro lado. La fundamental, es que el ejercicio normaliza el metabolismo en el organismo; por lo que no dejen de hacer ejercicio.
No queremos terminar esta sección en la cual estamos relacionando el ejercicio físico con la ingesta energética sin remarcar lo siguiente: es erróneo plantear un plan nutricional sólo considerando el balance energético que necesita una persona; pues uno podría correr el riesgo de tener una dieta poco variada. De los 20 aminoácidos que forman las proteínas, hay al menos 8 aminoácidos esenciales que necesita el cuerpo humano; por lo que es imprescindible una dieta variada que garantice la ingesta de todos los aminoácidos esenciales.

5.11. Cambios de fase

5.11.1. Las fases de la materia

El agua es una substancia fundamental para nosotros, pues es esencial para el desarrollo de la vida. En nuestra actividad diaria podemos encontrar ejemplos de agua en estado gaseoso, líquido o sólido.
Una sustancia está en la fase gaseosa cuando sus moléculas no están ligadas y pueden moverse libremente. En la fase líquida, si bien el movimiento es posible, se observa una interacción intermolecular importante; lo que da origen a los fenómenos de tensión superficial.
En el estado sólido, o fase sólida, las moléculas ya no son libres de moverse respecto de las otras y se observa una interacción intermolecular más fuerte; lo que se traduce en un aspecto relativamente rígido del cuerpo formado por una sustancia sólida.
A estos tres estados de la materia, se puede agregar también el plasma. Si calentamos mucho un gas, lograremos que algunos de los electrones externos de las moléculas se separen de las mismas; con lo que tendríamos una mezcla de moléculas neutras, moléculas ionizadas positivamente y electrones libres con carga negativa. Este es un ejemplo de un plasma; donde los efectos electromagnéticos serán importantes. Podemos encontrar plasma en el interior de tubos fluorescentes.
Cuando una sustancia sufre un cambio de fase, como por ejemplo de sólido a líquido, se debe entregar calor a la misma para que el cambio de fase se lleve a cabo. Es así que se habla del *calor latente de licuefacción*, para el cambio sólido a líquido. Se usa el término *calor latente de vaporización* para el cambio de fase de líquido a gas.

5.11.2. Enfriamiento de los cuerpos por evaporación

Si en verano nos zambullimos en un río para refrescarnos, luego se suele experimentar la situación paradójica que cuando salimos del agua sentimos frío.

¿Por qué se siente frío cuando uno sale del río, si la temperatura del agua suele ser menor que la temperatura del aire?

El aire nos tendría que estar calentando, sin embargo sentimos frío. Y sentiremos más frío aún si hay una brisa, o viento.

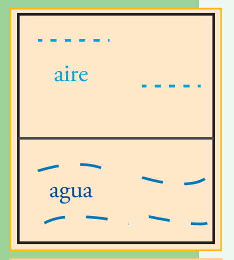


Figura 5.12. Esquema de un sistema que consiste de una cantidad de agua cuya superficie está en contacto con aire.

Lo que sucede es que mientras se está evaporando el agua que tenemos en la piel, el proceso nos está quitando calor de nuestro cuerpo. Para entender esto pensemos en la situación simplificada en que tenemos un sistema donde hay una parte con agua líquida cuya superficie está en contacto con aire, como indica la figura 5.12. Las moléculas de agua que están cerca de la superficie, se mueven con diferentes velocidades. Las más veloces, o sea las que tienen mayor energía cinética, son las que tienen más probabilidad de escaparse del líquido e integrar la masa de aire. En este proceso de evaporación, se selecciona las moléculas más energéticas para disminuir la masa del líquido. Es por este motivo que a medida que transcurre el tiempo en el proceso de evaporación, la energía cinética media de las moléculas del líquido disminuye. Y como la temperatura es una medida de la energía cinética media, se tiene que la temperatura del líquido disminuye en el proceso de evaporación.

Si el aire está en movimiento, el proceso de evaporación es más eficiente, por lo que el líquido se evapora más rápidamente, con lo que se logra una disminución de la temperatura mayor por unidad de tiempo. Esto explica la experiencia en el río mencionada anteriormente.

El proceso de enfriamiento por evaporación, es el mecanismo que usa el cuerpo humano para regular la temperatura en los días cálidos; esto es, la transpiración. Por cada gramo de agua que se evapora de la piel, se extraen aproximadamente 580 calorías.

Pérdida de líquido durante ejercicios bajo la radiación solar

Consideremos nuevamente el ejemplo de un ciclista que realiza una trepada, para la cual emplea 30 minutos. Durante este ejercicio el ciclista estaba expuesto a la radiación solar. Asumiremos que si bien, la superficie efectiva de exposición es de 0,5 m^2, aunque la superficie de la piel expuesta directamente al sol es menor. Dado que radiación solar implica una potencia de unos 1000 W/m^2, la energía absorbida total es de

$$Q_{solar} = 1.000 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} 0{,}5\ \mathrm{m}^2 \times 30 \times 60\ \mathrm{s} = 900.000\ J = 215.013\ \mathrm{cal}. \qquad (5.38)$$

De aquí deducimos que para compensar este calentamiento, con un correspondiente enfriamiento por evaporación de la transpiración, se debe perder la siguiente cantidad de agua:

$$\mathrm{m} = \frac{Q_{solar}}{580\ \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g}}} = 370{,}7\ \mathrm{g}. \qquad (5.39)$$

En este cálculo no hemos tenido en cuenta que probablemente fuese un día de calor, que obligase al ciclista a perder más agua para compensar el calentamiento de su cuerpo debido al aire caliente.

Si comparamos este resultado con los cálculos de la relación del trabajo físico con la ingesta energética, vemos que en definitiva el ciclista perderá más peso evaporando agua para regular su temperatura, que “quemando” grasas para compensar el trabajo realizado.

Segundo principio de la termodinámica

Capítulo 6

6.1. Procesos termodinámicos reversibles e irreversibles

Un proceso termodinámico reversible es aquel que podemos realizar también en el sentido inverso, sin ningún inconveniente, de tal forma que el sistema y el entorno vuelven a sus estados iniciales. Si podemos realizar un proceso por medio de una sucesión de estados de equilibrio termodinámico; entonces el proceso es reversible, pues podremos realizarlo en sentido inverso.

Un ejemplo de proceso reversible puede ser la expansión adiabática lenta de un gas ideal como muestra la figura 6.1. En realidad un proceso reversible se puede caracterizar por una sucesión de estado de equilibrio que se recorren muy lentamente. *Muy lentamente* significa que en todo momento el sistema se puede considerar en equilibrio termodinámico. Es por ello que un proceso reversible se lo puede identificar por medio de una curva en un gráfico del espacio de estados de equilibrio.

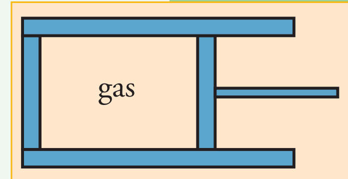


Figura 6.1. Diagrama de un proceso de expansión adiabática de un gas ideal. Las paredes son adiabáticas y el pistón, que se mueve muy lentamente, impide el paso del calor también.

Para caracterizar un proceso irreversible denotaremos también los estados termodinámicos del entorno del sistema. Digamos que existe un proceso termodinámico tal que el estado inicial del sistema de interés es A_s ; mientras que el estado inicial del entorno es A_e . El proceso termodinámico es tal que el sistema de interés llega al estado B_s ; mientras que el entorno se encuentra finalmente en el estado B_e . Siempre es posible realizar un proceso termodinámico que lleve al sistema de interés del estado B_s al estado inicial A_s ; diremos que el proceso inicial es irreversible si cuando llevamos al sistema al estado inicial el entorno no vuelve a su estado inicial A_e sino a otro estado termodinámico. O sea que para llevar al sistema al estado original uno es forzado a cambiar el estado del entorno desde su estado inicial.

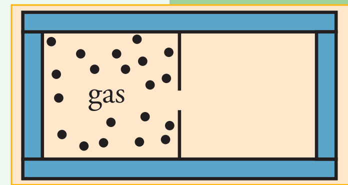


Figura 6.2. Diagrama de un proceso de expansión adiabática libre de un gas ideal. Las paredes son adiabáticas y existe un orificio en el tabique que separa ambos compartimientos. Inicialmente todo el gas está en el compartimiento de la izquierda.

Un ejemplo de proceso irreversible puede ser la expansión adiabática libre de un gas ideal como muestran las figuras 6.2 y 6.3.

Este proceso parte de un estado inicial que no muestra equilibrio termodinámico; sin embargo, el sistema, con el correr del tiempo adquiere dicho equilibrio. El estado final mostrado esquemáticamente en la figura 6.3 es un estado de equilibrio y vemos que no retornará por sí solo al estado inicial.

Además notamos que en este proceso particular, nada cambia en el entorno, dado que no se ha hecho trabajo ni ha habido intercambio de calor.

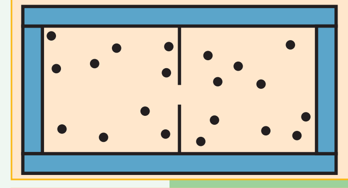


Figura 6.3. Diagrama del estado final de un proceso de expansión adiabática libre de un gas ideal. La moléculas se han repartido entre los dos compartimientos.

Es posible por medio de una sucesión de compresiones infinitesimales lograr que el sistema vuelva al estado termodinámico inicial, donde sólo

ocupaba el compartimiento izquierdo y manteniendo la misma temperatura inicial; pero esto necesariamente ocasionará cambios en el entorno del sistema. Por lo que el proceso es irreversible.

Experimento de la expansión libre de Gay-Lussac y Joule

El experimento de Joule consiste en medir la temperatura en el estado inicial y final de la expansión adiabática libre de un gas.
Originalmente se observó que la temperatura no cambió en dicho experimento; que es lo que corresponde al comportamiento de gases ideales. Experimentos con gases reales muestran pequeños apartamientos del comportamiento de gases ideales.

6.2. Procesos termodinámicos cíclicos en diagramas P-V

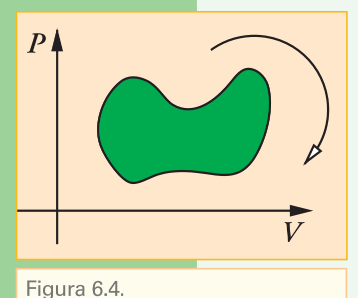


Figura 6.4.
Diagrama de un proceso cíclico en el espacio de estados en término de las variables presión P y volumen V. Para este caso en que el recorrido del ciclo es en el sentido horario, como indica la flecha, si llamamos A al área encerrada por la curva cerrada, se tiene que el trabajo W coincide con A; esto es, $W = A$.

Un proceso se dice cíclico cuando regresa a algún estado inicial.
Supongamos un proceso reversible cíclico en un diagrama presión-volumen. Como la energía interna es una función de estado, al recorrer un ciclo, la energía interna no cambia. Por otro lado, dado que en una transformación infinitesimal el trabajo ΔW se puede expresar por $P\,\Delta V$, se deduce que si el ciclo es en sentido horario el trabajo W es el área encerrada en el ciclo; mientras que si el ciclo tiene el sentido anti-horario, el trabajo W es menos el área encerrada en el ciclo (ver la figura 6.4).
A los procesos cíclicos se los suele llamar motores térmicos.
Un motor térmico es entonces una máquina que repite sus estados con el transcurso del tiempo, intercambiado calor con el entorno y produciendo trabajo (posiblemente negativo).
La aplicación del primer principio de la termodinámica implica el balance entre el calor intercambiado y el trabajo producido en un proceso cíclico, como indica la figura 6.5.

6.3. Segunda ley de la termodinámica

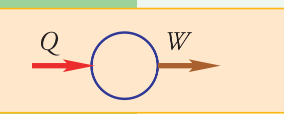


Figura 6.5.
Esquema de un proceso cíclico donde se indica el posible ingreso al sistema de una cantidad de calor Q y la posible producción de trabajo W.

Se usa indistintamente el nombre de segunda ley o segundo principio de la termodinámica. El segundo principio de la termodinámica restringe aún más los procesos termodinámicos que pueden ocurrir en la naturaleza. Veremos varios enunciados del segundo principio.

6.3.1. Enunciado de Kelvin-Planck

L 6.1 Es imposible en un proceso cíclico que el resultado sea el intercambio de calor con un solo reservorio y la producción de trabajo positivo.

Conocido como el enunciado de Kelvin-Planck. Es de notar que William Thomson es la misma persona que Lord Kelvin.
Este enunciado, indica que el diagrama mostrado en la figura 6.5 para un proceso

cíclico, no es lo suficientemente descriptivo. El enunciado de Kelvin-Planck nos indica que en un motor térmico se necesita más de un reservorio de calor. Lo más sencillo es considerar dos, como indica la figura 6.6

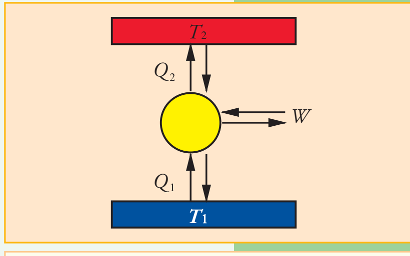


Figura 6.6.
Esquema de un proceso cíclico, denotado por el círculo amarillo; que intercambia calor Q_2 con el reservorio a temperatura T_2 y Q_1 con el reservorio a temperatura T_1. El sistema puede producir un trabajo W. Se asume que $T_2 > T_1$. El sentido de las flechas indicarán el signo de la cantidad respectiva. En el caso del calor es positivo si la flecha se dirige al motor térmico y negativo de la otra forma. En el caso del trabajo, es positivo si la flecha se dirige hacia afuera del motor térmico.

6.3.2. Móvil perpetuo de segunda especie

Con frecuencia se dice que el segundo principio de la termodinámica impide la posibilidad de construir un *móvil perpetuo de segunda especie*. Un móvil perpetuo de segunda especie es un dispositivo, o máquina, capaz de realizar procesos cíclicos indefinidamente que produce trabajo externo intercambiando calor con una única fuente térmica.

6.3.3. Enunciado de Clausius

Consideremos el caso particular en que el trabajo W es cero. Dado que se debe satisfacer el primer principio, los intercambios de calor con los dos reservorios se deben cancelar en este caso; por lo que solamente hay dos posibilidades, como se indica en las figuras 6.7 y 6.8. En el caso a) la primera ley se cumple por medio del balance

$$\Delta \mathbf{U} = 0 = Q_2 - Q_1 ; \qquad (6.1)$$

mientras que en el caso b) se cumple por medio de

$$\Delta \mathbf{U} = 0 = -Q_2 + Q_1 . \qquad (6.2)$$

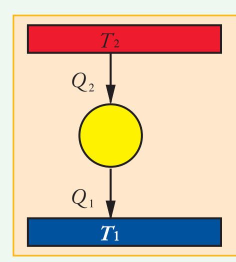


Figura 6.7.
Esquema de un proceso cíclico, sin producción de trabajo W. (Caso a).

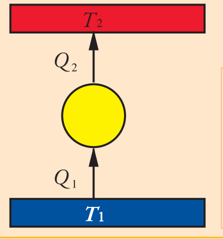


Figura 6.8.
Esquema de un proceso cíclico, sin producción de trabajo W. (Caso b).

Aclaramos nuevamente que estamos usando la convención de que el sentido de las flechas indica el flujo de calor, y por lo tanto el signo en frente de las cantidades. En general, las expresiones Q_2, Q_1 y W se asumen positivas o cero.
La pregunta natural es:

¿cuál de los dos casos ocurre en la naturaleza?

Esto se aclara con otra formulación de la segunda ley debida a Clausius, que es la siguiente:

L 6.2 No existe un proceso termodinámico cuyo solo efecto sea extraer calor de un reservorio y entregarlo a otro reservorio de temperatura mayor.

El enunciado de Clausius indica que sólo el caso a) es el real; dado que estamos asumiendo que $T_2 > T_1$.
Es posible probar que los dos enunciados son equivalentes.

6.3.4. Equivalencia de los enunciados de Kelvin-Planck y Clausius

• *Falsedad de L.6.1 implica falsedad de L.6.2*

Comencemos por asumir que 6.1 es falso; luego existe un motor térmico que opera

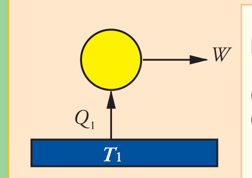


Figura 6.9. Esquema de un proceso cíclico, que opera intercambiando calor con un solo reservorio.

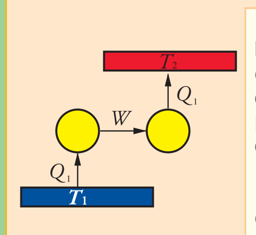


Figura 6.10. Esquema de dos procesos cíclicos, que operan intercambiando calor con un solo reservorio cada uno.

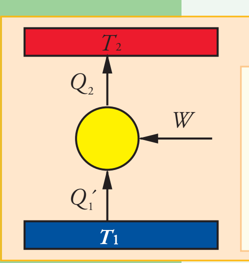


Figura 6.11. Esquema de un proceso cíclico, con un pequeño aporte de trabajo *W* del exterior.

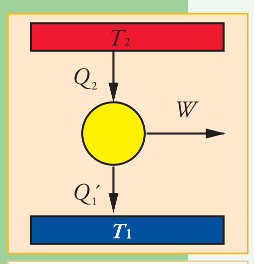


Figura 6.12. Esquema de un proceso cíclico, con una pequeña producción de trabajo *W*.

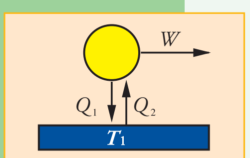


Figura 6.13. Esquema de un proceso cíclico combinado, con una pequeña producción de trabajo *W*.

con un solo reservorio como el que indica la figura 6.9. Podemos conectarlo con otro motor térmico que funciona al revés, entregando trabajo al motor para entregar calor a otro reservorio a temperatura $T_2 > T_1$, como se muestra en la figura 6.10. La combinación de estos dos motores térmicos no involucra ninguna producción de trabajo hacia el exterior; por lo que constituye un sistema que, tras realizar procesos cíclicos, extrae calor de un reservorio a temperatura T_1 para entregarlo a otro de mayor temperatura; lo que viola el enunciado 6.2. Por lo que si L.6.1 es falso, entonces L.6.2 lo es.

• *Falsedad de L.6.2 implica falsedad de L.6.1*

Ahora asumiremos que L.6.2 es falso; luego existe un motor térmico que funciona como se indica en la figura 6.8. Imaginemos un motor térmico que es una pequeña variación del ciclo mostrado en la figura 6.8, donde se entrega una pequeña cantidad de trabajo W al sistema, como muestra la figura 6.11. La variación del sistema se realiza de tal forma que el intercambio con el reservorio a mayor temperatura es Q_2. Es este caso Q'_1 no es igual a Q_2, sino que la aplicación del primer principio implica que $Q_2 = Q'_1 + W$. Si hacemos funcionar este sistema en reversa, se tendrá el ciclo representado por la figura 6.12. La combinación de este ciclo con el mostrado en la figura 6.8 da como resultado un sistema como el mostrado en la figura 6.13. Como $Q_2 > Q'_1$, este motor térmico viola el enunciado L.6.1. Por lo que si L.6.2 es falso, entonces L.6.1 lo es.

• *Equivalencia de los enunciados*

Hemos visto que si L.6.1 es falso, entonces L.6.2 lo es; y que si L.6.2 es falso, entonces L.6.1 lo es.
Concluimos, entonces que los enunciados son equivalentes.

6.3.5. Implicaciones de los enunciados de Kelvin-Planck y Clausius

Debemos determinar el sentido de las flechas; o equivalentemente el signo de las distintas cantidades que implican el enunciado de Kelvin-Planck; donde asumiremos que $T_2 > T_1$. Como se considera trabajo positivo, la flecha respectiva debe apuntar hacia afuera; por lo que queda considerar las cuatro posibilidades involucradas en las flechas que indican el flujo de calor.

Caso a)
Las dos flechas apuntan hacia arriba como indica la figura 6.14.
Notemos que la aplicación del primer principio implica

$$\Delta U = 0 = -Q_2 + Q_1 - W; \qquad (6.3)$$

por lo que necesariamente $Q_1 > Q_2$.

Imaginemos la superposición del caso a) con otro proceso cíclico que no produce trabajo y que absorbe una cantidad de calor Q_1' del reservorio a temperatura T_2 y entrega la misma cantidad al reservorio a temperatura T_1. El segundo sistema se ajusta de tal forma que las cantidades Q_1' y Q_1 coinciden. Esto está representado en la figura 6.15. Como los intercambios de calor con el reservorio a temperatura T_1 se cancelan, el sistema equivalente representa sólo intercambio de calor positivo con el reservorio a temperatura T_2 y la producción de trabajo positivo; lo que contradice el enunciado; por lo que este caso no es posible.

Figura 6.14.
Caso a) en que las dos flechas apuntan hacia arriba.

Figura 6.15.
Variación del caso a).

Caso b)

La flecha superior apunta hacia abajo y la inferior hacia arriba como indica la figura 6.16.

Notemos que la aplicación del primer principio implica

$$\Delta \mathbf{U} = 0 = Q_2 + Q_1 - W. \qquad (6.4)$$

En forma similar al caso a), imaginemos la superposición con otro proceso cíclico que no produce trabajo y que absorbe una cantidad de calor Q_1' del reservorio a temperatura T_2 y entrega la misma cantidad al reservorio a temperatura T_1. El segundo sistema se ajusta de tal forma que las cantidades Q_1' y Q_1 coinciden. Esto está representado en la figura 6.17. Como los intercambios de calor con el reservorio a temperatura T_1 se cancelan, el sistema equivalente representa sólo extracción de calor del reservorio a temperatura T_2 y la producción de trabajo positivo; lo que contradice el enunciado; por lo que este caso no es posible.

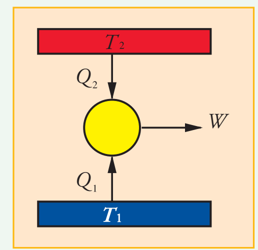


Figura 6.16.
Caso b) en que la fecha superior apunta hacia abajo y la inferior hacia arriba.

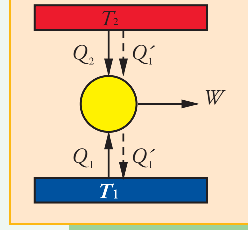


Figura 6.17.
Variación del caso b).

Caso c)

La flecha superior apunta hacia arriba y la inferior hacia abajo como indica la figura 6.18. Este caso viola el primer principio dado que se tiene

$$\Delta \mathbf{U} = 0 = -Q_2 - Q_1 - W; \qquad (6.5)$$

donde todos los términos del lado derecho de la ecuación son negativos, pero el lado izquierdo es cero.

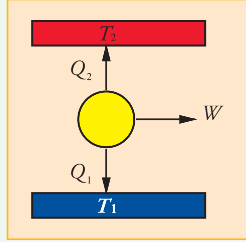


Figura 6.18.
Caso c) en que la flecha superior apunta hacia arriba y la inferior hacia abajo.

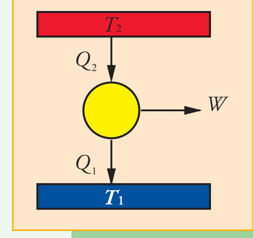


Figura 6.19.
Cuarto caso en que las dos flechas apuntan hacia abajo.

Caso d)

El único caso restante es el cual en que las dos flechas apuntan hacia abajo como señala la figura 6.19. Este es el caso implicado en el enunciado de Kelvin-Planck.

Notemos que la aplicación del primer principio implica

$$\Delta \mathbf{U} = 0 = Q_2 - Q_1 - W. \qquad (6.6)$$

Con esta argumentación hemos probado el siguiente resultado que se deduce de la segunda ley de la termodinámica.

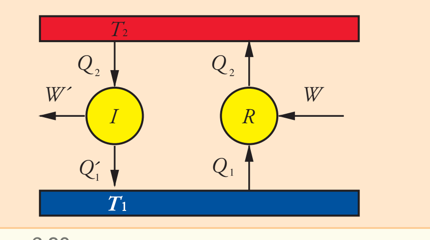


Figura 6.20.
Combinación de un ciclo irreversible de mayor eficiencia que un ciclo reversible.

R 6.1 Un motor térmico operando en contacto con dos reservorios de calor, produce trabajo positivo sólo si absorbe calor del reservorio a mayor temperatura y entrega calor al reservorio de menor temperatura.

6.3.6. Eficiencia de un motor térmico

Se denomina eficiencia η de un motor térmico a la relación

$$\eta = \frac{W}{Q_2}; \qquad (6.7)$$

o sea, al cociente entre el trabajo producido y el calor entrante al sistema. Debido a que Q_2 es mayor que W, la eficiencia es un número menor que uno.
Otro resultado importante del segundo principio es:

R 6.2 Ningún motor térmico operando entre dos reservorios de calor, puede tener mayor eficiencia que un motor térmico reversible operando entre los mismos reservorios.

Ejercicio 6.1 Probar R 6.2.

Un resultado importante del segundo principio también es:

R 6.3 Todos los motores térmicos reversibles operando entre los dos mismos reservorios de calor tienen la misma eficiencia.

Ejercicio 6.2 Probar R 6.3.

6.3.7. Ciclo de Carnot

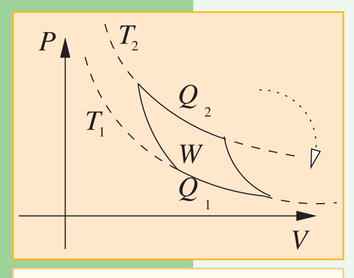


Figura 6.21.
Esquema de un ciclo de Carnot operando entre las isotermas T_2 y T_1. El ciclo se realiza en el sentido horario, por lo que el trabajo W se identifica con el área encerrada por la curva cerrada.

El ciclo de Carnot representa un motor térmico que es muy útil desde el punto de vista académico para el estudio general de los ciclos.
El ciclo de Carnot es un proceso cíclico de un gas ideal que involucra una etapa de expansión isotérmica a temperatura T_2, seguida de una etapa de expansión adiabática hasta alcanzar la temperatura T_1, una tercera etapa de compresión isotérmica, seguida de una última etapa de compresión adiabática hasta alcanzar la temperatura original T_2; como indica la figura 6.21.
En esta situación la temperatura T_1 resulta ser menor que la temperatura inicial T_2.
En los dos tramos adiabáticos obviamente no hay intercambio de calor; pero existe un intercambio de calor Q_2 con el reservorio a temperatura T_2 y un intercambio de calor Q_1 con el reservorio a temperatura T_1.
Es posible probar que vale la relación

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (6.8)$$

Con esta ecuación es posible expresar la eficiencia para un ciclo de Carnot en término de las temperaturas, obteniéndose

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\,. \qquad (6.9)$$

Por lo que hemos visto anteriormente esta eficiencia constituye el límite máximo para la eficiencia de cualquier motor térmico operando entre dos reservorios a temperatura T_2 y T_1. Esto sugiere el posible uso de motores térmicos para definir la temperatura; como haremos a continuación.

6.3.8. Temperatura termodinámica

Si en vez de usar un gas ideal para realizar el ciclo de Carnot, usáramos cualquier otra sustancia, debido a que la eficiencia no depende de la naturaleza del motor térmico, sino de las temperaturas involucradas, la siguiente definición es consistente.
Se define la *temperatura termodinámica* como aquella que en el ciclo de Carnot satisface

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \qquad (6.10)$$

y cuyo valor en el punto triple del agua es

$$T = 273,16; \qquad (6.11)$$

la unidad se denomina grado Kelvin con símbolo K.
Se debe notar que la temperatura termodinámica coincide con la temperatura definida a partir de un gas ideal.

6.3.9. Noción básica de entropía

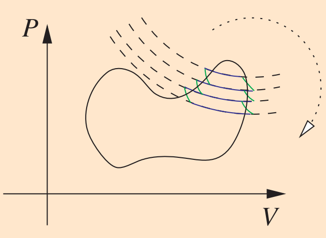


Figura 6.22. Diagrama de un proceso cíclico en el espacio de estados en término de las variables presión *P* y volumen *V*. El ciclo se puede aproximar por un conjunto de ciclos de Carnot. Se han señalado las isotermas y con trozos azules las partes de las mismas que contribuyen a los ciclos de Carnot. Los trazos correspondientes a las etapas adiabáticas han sido marcados con curvas verdes.

En un ciclo de Carnot vale la relación (6.8) donde por definición las cantidades de calor Q_1 y Q_2 son consideradas positivas. Sin embargo, Q_2 es calor entrante mientras que Q_1 es calor saliente. Para incluir esta información en la cantidad de calor podemos definir $\Delta Q_2 = Q_2$ y $\Delta Q_1 = -\,Q_1$; de tal forma que las cantidades de calor ΔQ_1 tienen signo positivo cuando se absorbe calor y signo negativo cuando el flujo de calor es hacia afuera del sistema. Luego, la ecuación (6.8) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0. \qquad (6.12)$$

Es importante notar que cualquier ciclo termodinámico puede ser aproximado por una colección de ciclos de Carnot adyacentes, como se muestra en la figura 6.22. Disminuyendo la diferencia entre las isotermas, se puede aproximar con arbitraria precisión un ciclo cualquiera. Usemos el índice numérico *i* para denotar cada ciclo. Para cada ciclo vale la relación (6.8); o sea

$$\frac{\Delta Q_{i1}}{T_{i1}} + \frac{\Delta Q_{i2}}{T_{i2}} = 0. \qquad (6.13)$$

Podemos sumar sobre el índice *i* y seguiremos teniendo el valor cero; o sea,

$$\sum_i \left(\frac{\Delta Q_{i1}}{T_{i1}} + \frac{\Delta Q_{i2}}{T_{i2}} \right) = 0. \qquad (6.14)$$

Sin embargo, en esta suma, gran parte del calor saliente ΔQ_{i1} para el ciclo *i* es calor entrante $\Delta Q_{(i+1)2}$ para el ciclo *i*+1; por lo que en la suma (6.14) sólo se toman en

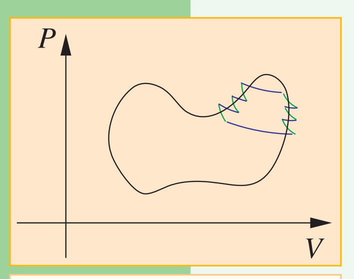


Figura 6.23.
Nos restringimos solo a tres de los ciclos de Carnot que aproximan al ciclo original.
Parte de los intercambios de calor de los ciclos adyacentes se cancelan quedando sólo los trazos marcados.

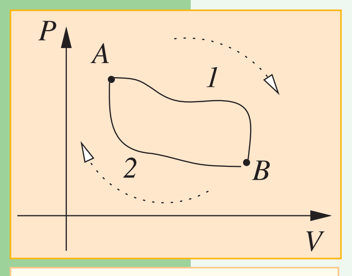


Figura 6.24.
Suma continua por los caminos γ_1 y γ_2.

cuenta las contribuciones correspondientes a la curva que determina al ciclo. Esto se ve gráficamente en la figura 6.23.

En el límite en que la distancia entre isotermas disminuye, la suma (6.14) converge a una suma continua sobre el camino del ciclo de la cantidad $\frac{\Delta Q}{T}$ que denotaremos por

$$\sum_{ciclo}\left(\frac{\Delta Q}{T}\right) \longrightarrow \oint \frac{dQ}{T}\,. \qquad (6.15)$$

O sea el símbolo $\oint$ representa la suma continua. En el lenguaje de la matemática, las sumas continuas se denominan integrales.

Concluimos que en cada ciclo reversible vale la relación

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0\,. \qquad (6.16)$$

Esto nos invita a definir una cantidad en término de su diferencial. Definimos la entropía S por su variación infinitesimal

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}\,; \qquad (6.17)$$

donde el subíndice 'rev' enfatiza que el proceso infinitesimal es reversible.

Vemos entonces que la suma continua sobre un ciclo de los diferenciales de entropía dan cero; o sea

$$\oint dS = 0. \qquad (6.18)$$

Notemos que dados dos estados termodinámicos, por ejemplo A y B, podemos pensar en dos caminos distintos: γ_1 y γ_2 que van de A hacia B. Con ellos podemos construir un camino cerrado yendo de A hacia B por γ_1 y volviendo de B hacia A por γ_2; como indica la figura 6.24. De lo que vimos anteriormente se tiene que la suma continua sobre el camino γ_1 de A hacia B más la suma continua sobre el camino γ_2 de B hacia A debe ser cero; o sea,

$$\sum_{cont.\,\gamma_1:A}^{B} dS + \sum_{cont.\,\gamma_2:B}^{A} dS = 0. \qquad (6.19)$$

Pero podemos hacer la suma sobre el camino 2 en el sentido inverso, lo que equivale a cambiar de signo la suma; esto es

$$\sum_{cont.\,\gamma_2:A}^{B} dS = -\sum_{cont.\,\gamma_2:B}^{A} dS\,; \qquad (6.20)$$

por lo que deducimos que la suma continua de A hacia B tiene el mismo valor independientemente del camino; dado que hemos obtenido

$$\sum_{cont.\,\gamma_1:A}^{B} dS = \sum_{cont.\,\gamma_2:A}^{B} dS\,; \qquad (6.21)$$

sin haber especificado los caminos γ_1 y γ_2.

Antes de proseguir notemos que, en general cada vez que tenemos una suma de diferenciales de una variable, el valor de la suma coincide con la resta del valor

de la variable en los extremos. Esto lo podemos comprobar de la siguiente manera. Sea x la variable en el intervalo que va de x_A a x_B ; el cual dividimos en diferenciales $dx_i = x_{i+1}-x_i$; donde asumiremos que i adopta los valores $i = 1, \ldots, N$ y además $x_1 = x_A$ y $x_N = x_B$. Luego se tiene

$$\sum_{i=1}^{N-1} dx_i = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \cdots + \\ + (x_{N-2} - x_{N-3}) + (x_{N-1} - x_{N-2}) + (x_N - x_{N-1}) \\ = x_N - x_1 = x_B - x_A ; \tag{6.22}$$

dado que todos los otros valores intermedios se cancelan.

De esta observación y de la ecuación (6.21) deducimos que la entropía es una función de estado que está definida a menos de una constante. Esto es así pues podemos tomar un estado termodinámico de referencia, digamos el estado C y asignar a la entropía un valor digamos S_0 ; o sea, $S(C) = S_0$, luego la aplicación de las ecuaciones (6.21) y (6.22) nos determina el valor de la entropía en cualquier otro estado. Por ejemplo, el valor de la entropía en el estado A estará dado por la ecuación

$$\sum_{cont.:C}^{A} dS = S(A) - S_0 ; \tag{6.23}$$

donde no hace falta indicar el camino, pues todas las sumas continuas de C hacia A tienen el mismo valor.

Si en vez de haber elegido el valor S_0 para el estado C hubiésemos elegido otro valor, digamos el S'_0 , el valor de $S(A)$ cambiaría acorde, pero la diferencia $S(B)$-$S(A)$ entre cualquier otro par de estados no cambiará.

6.3.10. Propiedades de la entropía

La entropía es una cantidad muy interesante que merece otro libro. En esta oportunidad, por cuestiones de completitud, sólo mencionaremos algunas propiedades de la entropía sin entrar en demasiado detalle, ni justificar cada afirmación.

• ***La entropía es una cantidad extensiva***

Al igual que la energía interna, la entropía es una cantidad extensiva; o sea, depende de la cantidad de materia que define al sistema termodinámico de interés. En particular, es una cantidad aditiva; lo que indica que, en el estado de equilibrio, la entropía del sistema combinado *a* y *b* es la suma de la entropía que le corresponde al sistema *a* más la que le corresponde al sistema *b*.

• ***En procesos adiabáticos reversibles***

Supongamos un proceso termodinámico que va del estado inicial A al estado final B. El cambio de entropía $\Delta S = S(B)$-$S(A)$ en este caso es cero, debido a la misma definición de la entropía dado por la ecuación (6.17); dado que podemos expresar

$$\Delta S = S(B) - S(A) = \sum_{cont.:A}^{B} dS = 0 ; \tag{6.24}$$

dado que $dS = 0$ en todo tramo de camino adiabático reversible en el espacio de estados.

• *En procesos adiabáticos irreversibles*

En un proceso adiabático irreversible en general la entropía cambiará. Por ejemplo, en el proceso de expansión libre de un gas ideal, discutido anteriormente, donde un gas ideal inicialmente a temperatura T ocupa un volumen V_A termina en un estado a temperatura T y volumen V_B, se puede calcular que el cambio de entropía está dado por

$$\Delta S = S(B) - S(A) = N k_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right); \qquad (6.25)$$

donde N es el número total de partículas del gas y ln es el símbolo de logaritmo natural. Notemos que en toda expansión libre se tiene $V_B > V_A$ y por lo tanto $\Delta S > 0$.

• *En procesos cíclicos generales*

Supongamos un proceso cíclico que puede ser pensado como constituido por m etapas. Cada una de las etapas puede ser reversible o irreversible. A lo largo del ciclo, el sistema realiza intercambios de calor $\Delta Q_1, \ldots, \Delta Q_m$ con m reservorios a temperaturas $T_1, \ldots, T_m$ respectivamente, se puede probar [Fer68], haciendo uso del enunciado de Kelvin-Planck L.6.1, que

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0\,. \qquad (6.26)$$

La igualdad vale cuando los ciclos son reversibles.
Haciendo uso de este resultado probaremos la siguiente afirmación. Si se puede llegar al estado B por una transformación irreversible desde el estado A, entonces para todo proceso de n etapas que nos lleva de A a B vale que

$$S(B) - S(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i}\,. \qquad (6.27)$$

Para un proceso reversible, vale la igualdad.
Esta relación se puede demostrar de la siguiente manera:
Sea γ_r una transformación reversible que nos lleva del estado B al estado A. Luego podemos pensar en el ciclo general (irreversible) que consta del proceso de n etapas que nos lleva de A a B y de la transformación reversible por el camino γ_r que nos lleva de B al estado A. Para este ciclo vale el resultado (6.26); por lo que se tiene

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{cont.:\,B}^{A} \frac{dQ}{T} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \\ &= \sum_{cont.:\,A}^{B} dS + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \\ &= S(A) - S(B) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i}; \end{aligned} \qquad (6.28)$$

donde hemos usado en el tramo reversible de B hacia A una suma continua y la

definición del diferencial de entropía. Esta desigualdad es la misma que (6.27).
Si el sistema está completamente aislado, se tiene que los ΔQ_i son cero para cada una de las etapas, por lo que se deduce:

$$S(B) \geq S(A); \qquad (6.29)$$

si el estado B se puede obtener del estado A por medio de una transformación irreversible.
Si un sistema aislado está en un estado de máxima entropía, compatible con los valores de las otras variables extensivas; entonces no puede ocurrir ningún otro proceso; pues de ocurrir debería aumentar la entropía, lo que contradice que está en su valor máximo. Por lo tanto los estados de equilibrio termodinámico de un sistema aislado son los de máxima entropía.

6.3.11. Segundo principio en término de la entropía

Vamos a recolectar estos resultados en una formulación alternativa de la segunda ley de la termodinámica.

L.6.3 Los valores tomados por los parámetros extensivos, en ausencia de vínculos, son aquellos que maximizan la entropía sobre la variedad de estados de equilibrio permitidos.

Notemos que usando el enunciado 6.1 de Kelvin-Planck del segundo principio se puede probar la desigualdad (6.26); con la cual se deduce la validez del enunciado 6.3 de la segunda ley.
Supongamos un proceso espontáneo cuyo único resultado es quitar una cantidad de calor ΔQ de un reservorio a temperatura T_1 y entregar la misma cantidad a otro reservorio a temperatura T_2, considerada mayor que la anterior. Consideremos al sistema aislado consistente en el reservorio a temperatura T_1 y el reservorio a temperatura T_2. Entonces la variación de entropía del sistema completo será

$$\Delta S = -\frac{\Delta Q}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_2} < 0; \qquad (6.30)$$

dado que $T_2 > T_1$. El enunciado L.6.3 nos dice que en estas condiciones la entropía sólo puede aumentar, por lo que este proceso no puede ser posible.
Este argumento prueba que si L.6.3 es válida, entonces el enunciado de Clausius de la segunda ley es válido.

Anteriormente habíamos probado la equivalencia

enunciado de Kelvin-Planck $\Leftrightarrow$ enunciado de Clausius.

Ahora hemos visto las implicaciones

enunciado de Kelvin-Planck $\Rightarrow$ enunciado de máxima entropía;

y

enunciado de Clausius $\Leftarrow$ enunciado de máxima entropía;

lo que implica que las tres formulaciones son equivalentes.

Capítulo
7

Detalle de sistemas termodinámicos

Para tener una descripción más detallada de un sistema termodinámico se debe trabajar con más información del mismo. En principio esto se logra con información de su descripción microscópica; o sea, molecular o atómica. En lo que sigue daremos información básica de algunos sistemas termodinámicos sencillos.

7.1. Distribución de velocidades del gas ideal

7.1.1 Distribución de Maxwell

Consideremos un gas ideal a una temperatura dada. Las partículas del mismo tendrán una distribución de velocidades que se las podría caracterizar en término de probabilidades.
Dado el sistema cartesiano inercial de coordenadas (x, y, z), sea dp_x la probabilidad de encontrar una partícula con velocidad entre v_x y $v_x + dv_x$; luego existirá un distribución $f(v_x)$ tal que

$$dp_x = f(v_x)dv_x \,. \qquad (7.1)$$

Como no hay una distinción física entre direcciones positivas y negativas, se puede reemplazar la anterior por

$$dp_x = f(v_x^2)dv_x \,; \qquad (7.2)$$

dado que la distribución f debe depender sólo del módulo de la velocidad.
En un gas en equilibrio, no existe ninguna dirección privilegiada, por lo que las velocidades en otras direcciones tendrán una descripción similar, de tal forma que si dp es la probabilidad de encontrar una partícula con velocidad entre v_x y $v_x + dv_x$, entre v_y y $v_y + dv_y$ y entre v_z y $v_z + dv_z$ se tendrá

$$dp = dp_x dp_y dp_z = f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2)dv_x dv_y dv_z \,. \qquad (7.3)$$

Dada una partícula con velocidad $\vec{v}$, se puede considerar una rotación tal que en el nuevo sistema el vector velocidad sólo tenga componentes en una dirección, digamos la x, por lo que se deduce que debería valer

$$f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)f(0)f(0) \,. \qquad (7.4)$$

La función que satisface estas propiedades es la exponencial, por lo que

$$f(w) = ae^{-bw} \,. \qquad (7.5)$$

Luego se puede expresar

$$dp = f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2)dv_x dv_y dv_z = Ae^{-b(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z$$
$$= Ae^{-b(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}v^2 dv \,\text{sen}\,(\theta) d\theta d\phi; \quad (7.6)$$

donde $A = a^3$.

La llamada distribución de Maxwell está dada por

$$\boxed{f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{(3/2)} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}}. \quad (7.7)$$

Notemos, entonces que el diferencial de probabilidad tridimensional está dado por

$$dp = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{(3/2)} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z$$
$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{(3/2)} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv \,\text{sen}\,(\theta) d\theta d\phi. \quad (7.8)$$

Usando esta distribución se pueden definir varias cantidades que presentamos a continuación. La velocidad más probable está dada por

$$v_p^2 = \frac{2k_B T}{m}. \quad (7.9)$$

La velocidad media v_m es

$$v_m = 2\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{(3/2)}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2 = 2\left(\frac{2k_B T}{\pi m}\right)^{(1/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v_p. \quad (7.10)$$

Finalmente la velocidad cuadrática media viene dada por

$$v_c^2 = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{(3/2)}\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{(5/2)} = \frac{3}{2}\left(\frac{2k_B T}{m}\right) = \frac{3}{2}v_p^2. \quad (7.11)$$

Ejercicio 7.1 Calcule la velocidad más probable v_p para un gas monoatómico, con la masa de la molécula de oxígeno O_2, a una temperatura de 20 °C.

7.1.2. Camino libre medio

Supongamos que las moléculas que forman un gas son esferas duras de radio r. Luego una molécula chocará con otra cuando su centro esté a una distancia $2r$ del centro de otra molécula. Al área πr^2 se la llama sección eficaz de la molécula blanco del choque.

Asumamos que la velocidad característica de la molécula es v; luego en la unidad de tiempo, nos interesa conocer cuántas moléculas hay en el cilindro con volumen $\pi r^2 vdt$. Si denotamos con $\mathcal{V}$ al volumen molar, y si N_A es el número de Avogadro, se tiene que es $\frac{N_A}{\mathcal{V}}$ el número de moléculas por unidad de volumen. Por lo tanto, en el cilindro antes mencionado hay $\pi r^2 v\frac{N_A}{\mathcal{V}}$ moléculas; que coincide con el número de moléculas contra las que choca la molécula considerada. En realidad, para tomar en cuenta el movimiento de las moléculas blanco, se debe multiplicar el resultado anterior por $\sqrt{2}$; por lo que si ν es el número de choques por segundo se tiene

$$\nu = \sqrt{2}\pi r^2 v\frac{N_A}{\mathcal{V}}. \quad (7.12)$$

Se define el camino libre medio λ por

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi r^2}\frac{\mathcal{V}}{N_A}. \qquad (7.13)$$

7.2. Radiación térmica como gas de fotones

En esta sección se entiende a la radiación térmica como un gas de fotones con una particular distribución en el espectro de energía, que presentamos a continuación.
La energía de los fotones está relacionada con su frecuencia por la ecuación

$$E = h\nu; \qquad (7.14)$$

donde h es la constante de Planck.

7.2.1. Espectro de Planck

La densidad energía interna $\mathbf{U}/V$, por unidad de volumen, se la puede poner en término de la densidad de energía u_ν, por unidad de frecuencia y unidad de volumen, entre las frecuencias ν y $\nu + d\nu$, por

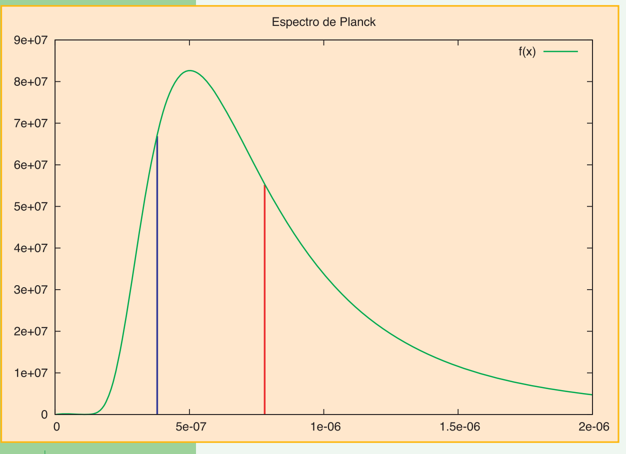
$$\boxed{u_\nu d\nu = \frac{8\pi d\nu^3}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)} d\nu}; \qquad (7.15)$$

donde h es la constante de Planck, y c la velocidad máxima de las interacciones, o velocidad de la luz en vacío. Este es el llamado espectro de Planck. Esta ecuación se la puede deducir de la física estadística cuántica, pero no estudiaremos esto aquí.
Se puede emplear la longitud de onda $\lambda = c/\nu$, para expresar el espectro de Planck de donde se obtiene

$$\boxed{u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)} d\lambda}. \qquad (7.16)$$

Si bien se tiene que $d\nu = -(c/\lambda^2)d\lambda$, cuando se pone la densidad de energía bajo un signo integral, los límites de la misma se dan vuelta, por lo que se usa el signo positivo en (7.16).

Figura 7.1. Espectro de irradiación Planck para un cuerpo con temperatura de 5.775 K. El eje vertical está en unidades de watt por metro cuadrado por micrón (W/m^2)/(μm); mientras que el eje horizontal está en metros.



7.2.2. Ley de desplazamiento de Wien

Esta ley determina la longitud de onda λ_m en que el espectro es máximo. Vemos que u_λ es máximo cuando $\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)$ es mínimo; o equivalentemente cuando

$$5\lambda^4\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right) - \lambda^5 e^{\frac{h\nu}{k_B T}}\frac{hc}{\lambda^2 k_B T} = 0. \qquad (7.17)$$

Por lo que el valor λ_m que da el valor máximo de u_λ, debe satisfacer

$$\left(1 - e^{-\frac{hc}{\lambda_m k_B T}}\right) = \frac{hc}{5\lambda_m k_B T}. \qquad (7.18)$$

La solución a esta ecuación trascendente es

$$\frac{hc}{\lambda_m k_B T} = 4{,}965114231744276; \qquad (7.19)$$

donde hemos expresado el resultado con 16 cifras significativas.
Equivalentemente se pude expresar

$$\lambda_m = 0{,}0028976\, m\frac{K}{T}. \qquad (7.20)$$

Si tomamos como temperatura del Sol a 5.775 K se tiene que el máximo de emisión para esta temperatura es para λ_m = 501,8 nm = 5,018x10^{-7} m = 4018 Å; donde Å es un angstrom = 10^{-10} m.

Ejercicio 7.2 ¿Con qué longitud de onda irradia una pared que está a 20 ˚C? ¿Hacia qué lado del espectro visible está esta longitud de onda?

7.2.3. Irradiación térmica

La relación que tiene esta densidad de energía con la radiación térmica absorbida por un cuerpo negro a temperatura T es la siguiente: si denotamos con I_ν la radiación emitida (recibida) por un cuerpo negro a temperatura T por la unidad de superficie, por unidad de tiempo, entonces se tiene

$$I_\nu = \frac{c}{4}u_\nu. \qquad (7.21)$$

En la figura 7.1 se muestra el espectro de la radiación emitido por un cuerpo negro a temperatura de 5.775 K.
En la figura 7.2 se muestra el espectro de la radiación emitido por un cuerpo negro a temperatura de 5.775 K en el rango del espectro visible.

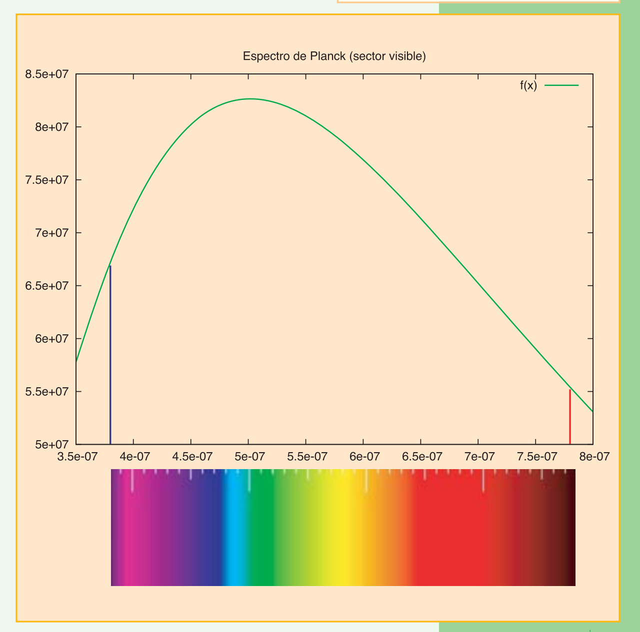


Figura 7.2.
Espectro de irradiación Planck para un cuerpo con temperatura de 5.775 K en el sector visible. El eje vertical está en unidades de watt por metro cuadrado por micrón (W/m^2)/(μm); mientras que el eje horizontal está en metros. El gráfico de abajo muestra aproximadamente la ubicación de los colores respecto de la longitud de onda de la luz.

7.2.4. Energía interna de un gas de fotones

El cálculo de la energía interna **U** de un gas de fotones correspondiente a la radiación térmica se obtiene de la suma continua de $u_\nu\, d\nu$. De donde se obtiene

$$\frac{\mathbf{U}}{V} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3}T^4; \qquad (7.22)$$

o sea, la densidad de energía $\mathcal{E}_r$ de un gas de fotones viene dada por

$$\mathcal{E}_r = \frac{\mathbf{U}}{V} = aT^4; \qquad (7.23)$$

con

$$a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3}. \qquad (7.24)$$

Luego la irradiación total I, o sea la potencia, emitida o recibida por unidad de área, será

$$I = \frac{c}{4}\frac{\mathbf{U}}{V} = \sigma T^4; \qquad (7.25)$$

donde $\sigma = \dfrac{ac}{4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann, obteniéndose

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2} = 5{,}670400 \times 10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}\,. \qquad (7.26)$$

Estas relaciones las habíamos presentado anteriormente.
Esta es la forma teórica en que se calcula este tipo de constantes; o sea, partiendo de la física microscópica.

7.2.5. Presión de un gas de fotones

Para un gas de fotones se puede hacer un análisis análogo al realizado para el caso de un gas ideal de partículas materiales. Sin embargo, al ser los fotones partículas sin masa, se debe ser cuidadoso en el tratamiento.
Consideremos un gas de fotones en un volumen V. Cada fotón tiene un momento dado por

$$|\vec{p}\,| = \frac{h\nu}{c}; \qquad (7.27)$$

donde h es la constante de Planck, ν la frecuencia y c la velocidad máxima de las interacciones.
Cuando un fotón choca sobre una pared, en forma elástica, formando un ángulo Θ con la normal a la misma, que coincide con el plano $x = 0$; se produce una transferencia de momento a la pared. Descomponiendo el momento del fotón antes del choque en término de sus componentes

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z); \qquad (7.28)$$

Ejercicio 7.3 ¿Qué presión ejerce el gas de fotones encerrado en una habitación a oscuras, cuyas paredes están a 20 °C?

vemos que el momento después del choque será

$$\vec{p}\,' = (-p_x, p_y, p_z); \qquad (7.29)$$

por lo que la variación de momento será

$$\delta\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = (-2p_x, 0, 0). \qquad (7.30)$$

Luego se tiene

$$p_x = \frac{h\nu}{c}\cos(\Theta). \qquad (7.31)$$

Ejercicio 7.4 ¿Cuál es la energía interna que corresponde al gas de fotones encerrado en una habitación, cuyas paredes están a 20 °C y cuyas dimensiones son: ancho = 3 m, largo = 4 m y alto = 3 m?

Del cálculo detallado se obtiene que la presión P debido a la radiación térmica está dada por

$$P = \frac{1}{3}\frac{\mathbf{U}}{V}; \qquad (7.32)$$

o equivalentemente

$$\boxed{PV = \frac{1}{3}\mathbf{U}}, \qquad (7.33)$$

que es la ecuación de estado para un gas de fotones.

Capítulo

8

Energía de partículas relativistas

8.1. Introducción histórica a la relatividad especial

Con el objeto de facilitar el estudio de similitudes y diferencias de la relatividad especial con la mecánica clásica no-relativista repasamos aquí los elementos de la mecánica clásica.

8.1.1. Compendio del marco teórico de la mecánica clásica

La primera estructura teórica de la física que se desarrolló, fue el *marco teórico de la mecánica clásica*. Los aportes de Galileo Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727) fueron de capital importancia.
En el marco teórico de la mecánica clásica, el tiempo tiene un carácter absoluto; por lo que el concepto de simultaneidad es universal.
Un concepto fundamental en física es el de aceleración, que sintetiza la variación de la velocidad respecto del tiempo. Sin embargo, la pregunta natural es, ¿respecto de qué sistema de coordenadas se deben medir las aceleraciones? La respuesta es: respecto de los *sistemas inerciales* [Mor00].
En los sistemas inerciales las leyes de la física adoptan su forma más sencilla. Un principio fundamental de la mecánica clásica es el llamado *principio de la relatividad.*

P 8.1 Principio de la relatividad
Todo sistema cartesiano en movimiento uniforme rectilíneo, respecto de un sistema inercial, es también un sistema inercial.
Las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema inercial de referencia.

Hasta aquí éstas son consideraciones cinemáticas. Las contribuciones más importantes que realizó Newton fueron en el campo de la dinámica; o sea, en las leyes del movimiento de los cuerpos. Las leyes introducidas por Newton determinan las aceleraciones de los cuerpos. En ellas existe la tácita suposición de que *las interacciones entre partículas son instantáneas*; equivalentemente, que *las velocidades de propagación de las interacciones son infinitas*. Esto tiene importantes consecuencias que se manifiestan en las leyes de transformación entre sistemas inerciales.
Supongamos un sistema inercial de coordenadas cartesianas (t, x, y, z) que denotaremos con la letra K. Supongamos otro sistema de coordenadas cartesianas (t', x', y', z') que denotaremos con la letra K', que se mueve respecto de K en la dirección del eje x con velocidad V; de tal forma que al tiempo $t = 0$ los dos orígenes coinciden. Debido al principio de la relatividad 8.1 el sistema K' también es inercial. En el marco teórico de la mecánica clásica, este sistema de coordenadas está relacionado

con el primero por medio de las siguientes transformaciones:

$$t' = t, \quad (8.1) \qquad y' = y, \quad (8.3)$$

$$x' = x - tV, \quad (8.2) \qquad z' = z; \quad (8.4)$$

que se las conoce como *transformaciones propias de Galileo*.

Notar que los intervalos de tiempo coinciden en los dos sistemas; dado que $\Delta t' = \Delta t$.
Además, simultaneidad en un sistema es equivalente a simultaneidad en el otro sistema; dado que $t = t_0$ implica que $t' = t_0$.

Nota histórica

Galileo comenzó sus estudios en la Universidad de Pisa en 1581. Allí aprendió la física como se la entendía en la antigua Grecia. Sin embargo, Galileo cuestionó los puntos de vista aristotélicos; por lo que realizó diversos experimentos estudiando el movimiento de los cuerpos. Construyó telescopios con los que realizó varios estudios astronómicos que incluyeron la Luna, cuatro satélites de Júpiter, las fases de Venus, manchas solares y otros. Galileo sufrió la dureza de la Inquisición; dado que fue hallado culpable de herejía por sus escritos en el libro *Diálogo sobre los principales sistemas del mundo* y condenado a prisión domiciliaria por el resto de su vida. Se reconocen los aportes que Galileo ha realizado a la cinemática, pero una de sus contribuciones más importantes es en el uso del método científico; al punto que alguien como Albert Einstein lo consideró el padre de toda la ciencia moderna.

Newton asistió a la Universidad de Cambridge, Inglaterra, y se graduó en el Trinity College. Estuvo al tanto de los trabajos de Galileo y Descartes, y fue contemporáneo de Leibniz. Sus principales contribuciones a la mecánica clásica están contenidas en el libro, en latín, *Philosophiae Naturalis Principia Matemática*, que en castellano sería: *Principios matemáticos de la filosofía natural*; publicado en 1687 y al que se le suele llamar simplemente Principia. En este libro, no sólo se introducen las tres célebres leyes generales de la dinámica; sino que también describe las interacciones gravitatorias, por medio de lo que hoy se conoce como la ley newtoniana de la gravitación universal. En relación con esta ley se atribuye a Robert Hooke el haberle sugerido a Newton que la fuerza gravitacional debería variar como la inversa del cuadrado de la distancia a los cuerpos; también se atribuye a Newton no sólo no haber hecho ninguna referencia de las ideas de Hooke, sino el haber aprovechado su autoridad en la "Royal Society" para denigrar la imagen de Hooke. En aquella época no se estudiaba el cálculo diferencial en las universidades, por lo que Newton contribuyó al desarrollo del mismo; aunque hoy hablemos de las reglas de Leibniz (su contemporáneo) de las derivadas. La relación entre Leibniz y Newton fue más bien de disputas y discusiones. En particular, en sus trabajos, Newton introdujo la noción de espacio y tiempo absolutos; conceptos que Leibniz criticó tenazmente. En lo personal, Newton sufrió depresión y ataques de paranoia; se cree que provocado por las sustancias químicas con las que realizaba experimentos de alquimia, en una época de su vida. También le interesaron los temas religiosos y tuvo algunas ideas contrarias a la doctrina establecida. Las contribuciones científicas de Newton han sido descollantes. El éxito de la mecánica clásica newtoniana en explicar tanto los fenómenos terrestres como los astronómicos tuvo un gran impacto en la filosofía general del mundo; al punto que se creyó por un momento que todo sería explicable en términos mecanicistas.

Aclaración sobre la fecha de nacimiento de Newton: en algunas ocasiones se menciona la fecha de nacimiento como el 25 de diciembre de 1642; mientras que en otras se habla del 4 de enero de 1643. Esta diferencia de diez días es debida al uso en Inglaterra, en ese entonces del calendario juliano, mientras que en los países dominados por la religión católica se comenzó a usar desde 1582 el calendario gregoriano. Inglaterra y sus posesiones, comenzaron a usar el calendario gregoriano recién a partir de 1752.

8.1.2. Compendio del marco teórico de la relatividad especial

Como se mencionó en la introducción, la relatividad especial surge debido a la necesidad teórica de tener un marco teórico que incluyese las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell del siglo XIX. En 1905, Albert Einstein sugiere que la velocidad característica c, que aparece en las ecuaciones de Maxwell y que también se interpreta como la velocidad de la luz en el vacío, debe tener el mismo valor en todo sistema inercial; elevando esta proposición a nivel de principio o postulado. En el momento en que Einstein escribe el artículo de 1905, sólo se conocían las interacciones gravitatorias y las electromagnéticas. Hoy se conocen las *interacciones débiles* y las *interacciones fuertes* que gobiernan la dinámica del mundo subatómico. Es así que hoy se interpreta que la velocidad c es una constante universal que caracteriza la estructura básica del espaciotiempo y que constituye un límite máximo para la velocidad de propagación de toda interacción.
Esta afirmación la presentamos como un principio.

P 8.2 *Existe una velocidad finita máxima para la velocidad de propagación de las interacciones.*

Experimentalmente, se comprueba que la velocidad a la que hace referencia este principio, coincide con la velocidad de la luz en el vacío $\boldsymbol{c}$.
Por lo tanto, en la relatividad especial tomaremos como válido, nuevamente, el principio 8.1; con la única diferencia de que, ahora, no asumiremos que las interacciones poseen una velocidad instantánea de propagación.
Este principio tiene consecuencias importantes; en particular es posible deducir [Mor00] las leyes de transformación entre sistemas inerciales. Supongamos nuevamente los sistemas inerciales *K* y *K'* como fueron descriptos recientemente; entonces las coordenadas del sistema *K'* están relacionadas con las del sistema *K* por las siguientes ecuaciones:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}\, x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \qquad (8.5) \qquad\qquad y' = y\,, \qquad (8.7)$$

$$x' = \frac{x - V\, t}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \qquad (8.6) \qquad\qquad z' = z\,; \qquad (8.8)$$

que constituyen las llamadas *transformaciones de Lorentz*. Remarcamos, entonces que el principio 8.2 determina la forma en que los sistemas inerciales se transforman entre ellos, dada por las ecuaciones (8.5)-(8.8).
Es interesante notar que el límite newtoniano de las transformaciones de Lorentz, esto es cuando $c \to \infty$, o equivalentemente cuando las velocidades relativas de los sistemas involucrados son muy pequeñas comparadas con c, son casualmente las transformaciones propias de Galileo. De esta manera la cinemática de la relatividad especial se presenta

como una extensión natural de la mecánica clásica no relativista.
La manera en que se transforma la coordenada tiempo, vemos que involucra la aparición de coordenadas espaciales; por lo que en esta cinemática el tiempo ya no tiene un carácter absoluto y se torna imposible desprenderlo del concepto de espacio. Es por ello que en el contexto de la relatividad especial uno se acostumbra a referirse al espaciotiempo.
En particular notamos que los intervalos de tiempo ya no coinciden. Además la noción de simultaneidad en un sistema no es la misma que la noción de simultaneidad en el otro; por lo que ya no es un concepto útil, pues no tiene un carácter universal.

Nota: 8.1 *Este es un punto en que vale la pena detenerse. Una y otra vez la historia del desarrollo de la física nos ha dado la lección de tener cuidado con la representación del mundo que hacemos con el lenguaje. Esto surge debido a que el desarrollo del lenguaje que usamos cotidianamente, se ha realizado en función de las necesidades de la vida usual que desarrollamos en nuestra escala sobre la superficie del planeta que habitamos. Sin embargo, nos acostumbramos tanto a describir el entorno con nuestro lenguaje, que inconscientemente lo adoptamos como fuente y filtro del conocimiento; pasando a pensar que todo puede ser descriptible en término del lenguaje que desarrollamos a lo largo de miles de años para el uso de la vida cotidiana. El ejemplo del término "simultaneidad" nos permite remarcar este punto. Si uno se encierra en que se acostumbró al uso del término simultaneidad y que le parece una locura que no tenga un carácter absoluto, no tendrá oportunidad de conocer la realidad física que lo rodea. Una y otra vez la física nos confronta con estas situaciones en que somos forzados a tomar la realidad como es y adaptar nuestra intuición a los datos y el lenguaje matemático que aparece naturalmente en su descripción. Es tal vez por ello que Albert Einstein se refería a la Física Aventura del Pensamiento [EI58].*

En nuestras actividades habituales, aquí en las cercanías de la superficie de nuestro planeta, no pareciese que seamos conscientes de ningún efecto relativista; esto se debe que, en general, nuestras actividades involucran bajas velocidades, comparadas con c, por lo que casi todos los fenómenos los podemos describir haciendo uso del marco teórico de la mecánica clásica.
Las transformaciones de Lorentz tienen varias implicaciones que no discutiremos en esta ocasión. En lo que sigue nos concentraremos en la descripción del momento de partículas.

8.2 Transformaciones de cuadrivectores

Las transformaciones de Lorentz (8.5)-(8.8) parecen distinguir la manera en que se transforma la coordenada temporal de la manera en que se transforman las coordenadas espaciales, dado que la primera ecuación tiene unidades de tiempo mientras que las otras tres tienen unidades de longitud. Pero esto se puede arreglar para que todas las transformaciones no tengan unidades.
Definamos las coordenadas ($x^0 = c\,t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$), las cuales entonces tendrán las leyes de transformación:

$$x'^0 = \frac{x^0 - \frac{V}{c}x^1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \qquad (8.9) \qquad\qquad x'^2 = x^2, \qquad (8.11)$$

$$x'^1 = \frac{x^1 - \frac{V}{c}x^0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \qquad (8.10) \qquad\qquad x'^3 = x^3; \qquad (8.12)$$

donde se nota que en esta ocasión todas las coordenadas tienen las mismas unidades (de longitud) y por lo tanto, todos los factores multiplicando las coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) no tienen unidades.
Usaremos los índices a, b, c que adoptan los valores 0, 1, 2, 3 para referirnos por ejemplo a las coordenadas x^a; significando cualquiera de las (x^0, x^1, x^2, x^3).
Notemos que debido a que ahora el espaciotiempo forma una variedad de cuatro dimensiones, todo objeto geométrico reflejará esta situación. En particular, los vectores, son objetos que viven en un espacio de cuatro dimensiones, por lo que en esta situación están determinados por cuatro componentes. Las ecuaciones (8.9)-(8.12) son precisamente las que determinan la forma en que los cuadrivectores se transforman cuando son descriptos en dos sistemas inerciales distintos.
Un vector muy importante en la descripción del movimiento de partículas es el cuadrivector velocidad. En relatividad especial, la noción de velocidad también está asociada a variaciones de las coordenadas respecto del tiempo. Pero como hemos visto, ahora el tiempo no es absoluto, por lo que se debe precisar qué noción de tiempo se debe usar en la definición del cuadrivector velocidad.

8.2.1. Tiempo propio

Supongamos una partícula en reposo que está junto a un reloj. Ante estas circunstancias, los incrementos del tiempo del sistema cartesiano t y del tiempo dado por el reloj τ coincidirán; en particular se tendrá: $dt = d\tau$.
Si en vez la partícula tiene una trayectoria arbitraria, pero acompañada por su reloj, la descripción del movimiento será más compleja; pero es legítimo usar el tiempo marcado por el reloj acompañante para parametrizar la curva. De esta forma se tendrá $t(\tau)$, $x(\tau)$, $y(\tau)$ y $z(\tau)$.
Diremos que el tiempo medido por el reloj de la partícula es su *tiempo propio*.

8.2.2. Cuadrivector velocidad

Análogamente a lo que se hace en la cinemática galileana, se define el cuadrivector velocidad media u_{media} de la partícula por medio de

$$u^a_{media} = \frac{1}{c}\frac{\Delta x^a}{\Delta\tau}\,; \qquad (8.13)$$

donde se usa el factor $1/c$ para que el cuadrivector no tenga unidades.
En el límite en que $\Delta\tau$ se lo toma infinitesimalmente pequeño, se usa la notación de diferenciales, $d\tau$, y se arriba a la noción de cuadrivector velocidad instantánea u, que viene dado por

$$u^a = \frac{1}{c}\frac{dx^a}{d\tau}\,. \qquad (8.14)$$

Si denotamos con v^i, $i = 1, 2, 3$, las componentes de la velocidad coordenada; o sea

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}\,; \qquad (8.15)$$

entonces se puede expresar las componentes del cuadrivector velocidad u^a, que están dadas por

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \text{y} \qquad u^i = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{v^i}{c}. \qquad (8.16) \quad (8.17)$$

Es interesante notar que la ecuación (8.16) nos da la relación que existe entre la variación del tiempo propio τ y el tiempo coordenado t ; dado que como $x^0 = c\,t$ se tiene

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \qquad (8.18)$$

De aquí se deduce, dado que $\frac{v}{c} < 1$, que si un viajero realiza una travesía volviendo a un lugar de partida, su reloj marcará una hora menor al reloj que se dejó fijo en el sistema inercial solidario a la estación de partida.

8.2.3. Cuadrivector momento de partículas masivas

Otro vector que es de capital importancia en la descripción del movimiento de una partícula es el cuadrivector momento. Análogamente a como se define el momento en la mecánica newtoniana, podemos ahora definir el cuadrivector momento por medio de la relación

$$p^a = m\,c\,u^a\,; \qquad (8.19)$$

donde m es la masa de la partícula. Notemos que el momento tiene las unidades acostumbradas.
Las componentes del momento en término de las velocidades coordenadas v^i son:

$$p^0 = \frac{m\,c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \qquad \text{y} \qquad p^i = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}v^i. \qquad (8.20) \quad (8.21)$$

La componente temporal del momento nos da información de la energía de la partícula. En efecto, se define por energía E de la partícula a

$$E \equiv p^0 c = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \qquad (8.22)$$

Realizando una expansión de esta expresión de la energía para pequeñas velocidades, se obtiene

$$E = m\,c^2 + \frac{1}{2}m\,v^2 + O(v^4); \qquad (8.23)$$

al primer término se lo denomina *energía en reposo* E_0 de la partícula; o sea,

$$E_0 = m\,c^2; \qquad (8.24)$$

mientras que en el segundo término reconocemos la energía galileana de la partícula.
Sin entrar en detalles técnicos de la relatividad especial, notemos que si elevamos al cuadrado la componente temporal y le restamos el cuadrado de las componentes espaciales, se obtiene una constante; como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}(p^0)^2 - ((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2) &= \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left(m^2c^2 - m^2((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2)\right) \\ &= m^2c^2. \end{aligned} \qquad (8.25)$$

En realidad, ésta es la ecuación que determina la masa de las partículas.

Debemos advertir aquí que en la literatura de divulgación se suele hacer uso de la desafortunada noción de masa relativista m_{rel}, que se identifica con el factor que multiplica a c^2 en la ecuación (8.22), por lo que se tiene

$$E = m_{rel}\, c^2; \tag{8.26}$$

lo que implica que

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{8.27}$$

Aunque desaconsejamos el uso de esta noción, señalamos su existencia con el objeto de evitar confusiones. El número mecánico característico de una partícula es su masa m, que no cambia con la velocidad v.

8.2.4. Transformación del cuadrimomento

Como señalamos anteriormente las transformaciones (8.9)-(8.12) nos indican cómo se transforman los cuadrivectores, por lo que la expresión del cuadrimomento en dos sistemas inerciales K y K', como los usados anteriormente, está dado por

$$p'^0 = \frac{p^0 - \frac{V}{c}\, p^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \tag{8.28}$$

$$p'^1 = \frac{p^1 - \frac{V}{c}\, p^0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \tag{8.29}$$

$$p'^2 = p^2, \tag{8.30}$$

$$p'^3 = p^3. \tag{8.31}$$

8.2.5. Aplicación a la desintegración de partículas

Supongamos la situación en que una partícula inicial se desintegra en dos partículas. Describamos la situación desde el sistema inercial en que la partícula inicial está en reposo. En esta situación el momento inicial p^a_{ini} será:

$$p^0_{ini} = m\,c\,, \tag{8.32}$$

$$p^1_{ini} = 0, \tag{8.33}$$

$$p^2_{ini} = 0, \tag{8.34}$$

$$p^3_{ini} = 0; \tag{8.35}$$

o que implica que la energía inicial está dada por

$$E_{ini} = m\,c^2. \tag{8.36}$$

Denotemos con p^a_1 y p^a_2 los momentos de las dos partículas resultantes. En esta situación vale la *ley de conservación del momento* que en este caso implica las ecuaciones:

$$p^a_{ini} = p^a_1 + p^a_2; \tag{8.37}$$

cuya componente temporal ($a = 0$) implica la conservación de la energía; o sea,

$$E_{ini} = E_1 + E_2\,. \tag{8.38}$$

En término de las masas (m, m_1, m_2) de las partículas, se tiene

$$m_{ini}\, c^2 = \frac{m_1\, c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_2\, c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}\,. \qquad (8.39)$$

De esta ecuación se deduce, debido a que los factores $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ son mayores que uno, que la masa inicial, debe ser mayor que la suma de las masas remanentes; o sea,

$$m_{ini} > (m_1 + m_2)\,. \qquad (8.40)$$

• El caso de dos partículas unidas por un resorte

Consideremos la siguiente situación ideal en que pensamos en un cuerpo en reposo, de masa m, que consta de dos partículas con masas m_1 y m_2 que están atadas de tal forma que están en los extremos de un resorte de constante k que se ha comprimido una cantidad Δx ; donde para fijar ideas consideraremos esta cantidad como positiva. Para simplificar asumiremos que las masas de las partículas son iguales, o sea, $m_2 = m_1$ y que la masa del resorte es despreciable en comparación con m_1. Si permitimos que las ataduras se corten, los dos cuerpos tendrán la misma velocidad v, pero apuntando en direcciones opuestas, lo que se deduce de la conservación del momento.
Asumiremos que esta velocidad es no relativista; o sea, que $v << c$.

• *Análisis en el marco teórico de la física galileana*

En el marco teórico de la mecánica clásica uno diría que en esta situación, el resorte aporta con una energía potencial dada por

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k\Delta x^2\,. \qquad (8.41)$$

En este caso se debe plantear por separado la conservación de la energía y la del momento.
De la conservación de la energía se tiene:

$$E_{ini} = \frac{1}{2}mV^2 + E_{pot} = E_{pot} = E_{fin} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_1 v_2^2\,; \qquad (8.42)$$

donde estamos usando la notación V para denotar el módulo de la velocidad del cuerpo compuesto y ya hemos usado que la partícula 2 tiene la misma masa que la 1.
De la conservación del momento se tiene:

$$\vec{P}_{ini} = m\vec{V} = 0 = \vec{P}_{fin} = m_1\vec{v}_1 + m_1\vec{v}_2\,; \qquad (8.43)$$

de donde se deduce que $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.
Por lo tanto, usando las dos ecuaciones, se deduce que

$$m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2\,; \qquad (8.44)$$

por lo que se tiene que el módulo de la velocidad de las partículas remanentes es

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}\,\Delta x\,. \qquad (8.45)$$

Independientemente, se asume la conservación de la masa que implica que

$$m = m_1 + m_2 . \quad (8.46)$$

• *Análisis en el marco teórico de la física relativista*

En este caso se debe plantear la conservación del cuadrivector momento; o sea:

$$p^a_{ini} = p^a = p^a_{\text{fin}} = p^a_{1ini} + p^a_{2ini} . \quad (8.47)$$

De la ecuación proveniente de la componente temporal, esto es, cuando $a = 0$, se obtiene

$$p^0 = mc = \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} . \quad (8.48)$$

Mientras que de las tres ecuaciones provenientes de las componentes espaciales; esto es, cuando $a = i = 1, 2, 3$, se tiene

$$p^i = 0 = \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} v^i_1 + \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} v^i_2 ; \quad (8.49)$$

de donde nuevamente se deduce que la velocidad de la partícula 2 es opuesta a la de la partícula 1; o sea, $v^i_2 = - v^i_1$.

Enfatizamos aquí que no es usual en el contexto relativista usar la notación de flechitas para denotar vectores; por lo que en este marco teórico usamos la notación de índices para denotar vectores.

Luego de la ecuación anterior vemos que se satisface

$$E_{ini} = mc^2 = 2E_{1\,ini} = 2\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} . \quad (8.50)$$

Como estamos asumiendo que las velocidades son pequeñas; conviene expandir el lado derecho en término de una serie de potencias de $\left(\frac{v_1}{c}\right)$, cuyos primeros términos son:

$$2\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} = 2m_1 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + O(\left(\frac{v_1}{c}\right)^4)\right); \quad (8.51)$$

donde $O(\left(\frac{v_1}{c}\right)^4)$ significa términos que incluyen potencias de $\left(\frac{v_1}{c}\right)$ a la cuarta y mayores.

Si despreciamos términos que involucren potencias de $\left(\frac{v}{c}\right)^4$, vemos que en el marco teórico de la relatividad especial la masa total de este sistema será aproximadamente

$$m c^2 \simeq m_1 c^2 + m_2 c^2 + m_1 v_1^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 ; \quad (8.52)$$

donde hemos usado la relación entre velocidad final y energía potencial encontrada anteriormente.

Este sencillo ejemplo muestra que la ecuación (8.22) que esencialmente iguala ener-

gía con masa, no es una casualidad matemática, sino que efectivamente, en un cuerpo compuesto, todas las energías involucradas contribuyen a su masa total. Ésta es una situación nueva que no se tenía en el contexto de la mecánica clásica.

Ejercicio 8.1 Para comprobar la validez de la última ecuación Jaimito busca dos ladrillos de 1kg de masa cada uno, un resorte de constante k = 1N/m; el cual tiene una longitud natural de 1,2 m. Pone un ladrillo en cada extremo del resorte y lo comprime hasta que su longitud es 20 cm. Luego pesa al conjunto en una balanza. ¿Que precisión debe tener la balanza para que Jaimito pueda medir el efecto relativista sobre la masa?

8.2.6. Momento de las partículas sin masa

Supongamos ahora que la partícula que uno estudia no tiene masa como es el caso de un fotón. Luego, el momento k^a tendrá componentes (k^0, k^1, k^2, k^3) donde se debe satisfacer

$$k^0 = \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2}. \qquad (8.53)$$

Esto tiene que ver con el hecho de que las partículas sin masa viajan a la velocidad c y que todo objeto que viaja a la velocidad c no tiene masa. El momento de estas partículas debe satisfacer (8.53).

Notemos que si aplicamos la análoga de la ecuación (8.25) se obtiene

$$(k^0)^2 - ((k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2) = 0; \qquad (8.54)$$

motivo por el cual se afirma que la partícula no tiene masa.

Hemos usado otra letra para denotar el momento de un fotón con el objeto de enfatizar que es el momento de una partícula sin masa.

Como mencionamos anteriormente, la energía de un fotón E se puede relacionar con su frecuencia ν por medio de la ecuación $E = h\nu$; donde h es la constante de Planck. Esto quiere decir que la componente temporal del momento de un fotón en término de la frecuencia es

$$k^0 = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}. \qquad (8.55)$$

Ejercicio 8.2 Se dispone de un volumen de un kilómetro cúbico donde se tiene encerrada radiación electromagnética termalizada a temperatura T. ¿Cuál debe ser la temperatura para que la radiación electromagnética encerrada en el volumen pese 1kg?

Capítulo 9

Energía de los electrones en átomos y la materia

9.1. Introducción histórica a la mecánica cuántica

A fines del siglo XIX ya se tenía una descripción muy buena del sistema planetario, por medio de la mecánica newtoniana, y también se tenía una excelente descripción de los fenómenos electromagnéticos, por medio de las ecuaciones de Maxwell. A principios del siglo XX no sólo se tenía la tarea de unificar estas descripciones, sino que se había comenzado a detectar otro conjunto de observaciones que desafiaban el marco teórico de la mecánica clásica pero por otros motivos.
A continuación comentaremos, muy brevemente, algunas de las observaciones que condujeron a la necesidad de reformular la mecánica.

9.1.1. Radiación de cuerpo negro y la mecánica cuántica

La radiación térmica o radiación de cuerpo negro es un problema termodinámico, como vimos anteriormente. Cuando uno desea tener una descripción detallada de este tipo de sistemas recurre a la información microscópica que tiene del mismo. El problema que se encontró con este sistema, es que si se usa un modelo microscópico clásico, no se reproducen las observaciones. En efecto, si uno hace, por ejemplo, el modelo de ondas encerradas en una caja, se arriba a la llamada fórmula de Rayleigh-Jeans que muestra un comportamiento divergente para altas frecuencias, o lo que es equivalente, para cortas longitudes de onda. Sin embargo, la fórmula de Rayleigh-Jeans, que es cuadrática en las frecuencias, describían adecuadamente las observaciones para bajas frecuencias. Por otro lado, Wien encontró empíricamente que para altas frecuencias el comportamiento debía ser de la forma

$$u_\nu \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} a\nu^{3} exp^{-\frac{b\nu}{T}}; \qquad (9.1)$$

donde a y b son constantes y ν la frecuencia.
Ante esta situación, Planck logra interpolar las dos expresiones asintóticas con su famosa fórmula del espectro de la ecuación (7.15). Pero lo sobresaliente de la labor de Planck es que luego buscó una justificación microscópica de esta ecuación y encontró que si asumía que los átomos de las paredes de la cavidad sólo podían absorber y emitir radiación en *cuantos* de energía $h\nu$; entonces se podía deducir el espectro dado por (7.15).
La palabra *'cuantos'* aquí se usa en contraposición a continuo. O sea, si átomos están en presencia de radiación electromagnética de frecuencia ν, estos no interaccionan con la radiación con cualquier cantidad de energía, sino en *'cuantos'* de energía $h\nu$. Esto no se condice con lo que uno esperaría en el marco teórico de la mecánica clásica.

9.1.2. Difracción de ondas de materia

Los electrones fueron descubiertos como partículas elementales al final del siglo XIX. Poco después de su descubrimiento se realizaron experimentos en que un haz de electrones de energía moderada se hacía incidir sobre una delgada lámina de materia. Una placa fotográfica ubicada detrás de la lámina mostraba patrones de interferencia [Hei49], como si el haz consistiese de ondas que fuesen difractadas por la estructura microscópica de la materia. Determinaciones de la longitud de onda λ característica de estas ondas da $\lambda = \frac{h}{p}$, donde p es el momento de las partículas que forman el haz.

Esta dualidad onda-partícula es uno de los paradigmas a que nos enfrenta la cuántica y que claramente es irreconciliable con el marco teórico de la mecánica clásica.

9.1.3. El efecto fotoeléctrico

Si se irradia la superficie de un metal con luz monocromática, se puede observar el desprendimiento de electrones. Pero esto sólo sucede si la frecuencia de la luz es superior a un determinado umbral. Este efecto, que fue observado en 1899, fue recién explicado por Einstein en uno de sus famosos artículos de 1905. Einstein sugirió que el efecto cuántico descubierto por Planck, debía también adjudicarse a la misma radiación electromagnética. De esta forma, la energía en un haz de luz se debe entender como la suma de contribuciones de sus cuantos; cada uno de energía $h\nu$. Si se llama W al trabajo necesario que se debe realizar para arrancar un electrón de la superficie del metal, se debe iluminar la superficie con luz cuya frecuencia sea igual o superior a ν_0, donde

$$h\nu_0 = W. \qquad (9.2)$$

Si se ilumina la superficie con una luz cuya frecuencia es menor a este umbral, no importa cuán intensa sea esta luz, no podrá arrancar un solo electrón. Si por el contrario se ilumina la superficie con luz cuya frecuencia es mayor que este umbral, el exceso de energía será transformada en energía cinética del electrón arrancado. O sea, si $\nu > \nu_0$, entonces la energía cinética E_C del electrón libre será

$$E_C = h\nu - W. \qquad (9.3)$$

9.1.4. Experimento de Franck y Hertz

En este arreglo experimental se hace pasar un haz de electrones en un tubo que contiene mercurio gaseoso. Esto crea una corriente, que se puede medir como función de la energía cinética de los electrones. Se encuentra que la corriente muestra una curva con forma de sierra, con mínimos que se reproducen a intervalos periódicos. Esto se interpreta que en el experimento se detectan tanto colisiones elásticas como inelásticas. Cuando la energía de los electrones supera unos valores de excitación, parte de su energía es usada para cambiar el estado de los átomos de mercurio; lo cual sólo sucede en cuantos de energía.
Sin entrar en el detalle del arreglo experimental, sólo comentamos que este experimento dejó en claro que los niveles de energía de los átomos están *cuantizados*; o sea, no es un continuo de niveles de energía sino que presenta un espectro discreto de niveles posibles.

9.1.5. Comentario de los experimentos

De los experimentos mencionados se desprende que tanto la materia como la radiación electromagnética presentan un comportamiento dual; en algunos casos tienen las propiedades de ondas en otros la de partículas.
Deberíamos pensar que la imagen mental que tenemos de partículas y ondas son ambas incompletas para la descripción de la materia y la radiación y sólo tiene la validez de analogías que son precisas sólo en casos límites. Estas analogías son justificables para describir cosas que nuestro lenguaje usual no tiene palabras para describir.
Esta limitación de nuestro lenguaje no nos debería sorprender; dado que el mismo fue desarrollado para poder describir las experiencias cotidianas; por lo que es de esperar que el lenguaje usual tenga limitaciones para describir la naturaleza de la materia a escalas atómicas.
De todas formas, las relaciones matemáticas no tienen las mismas limitaciones que el lenguaje usual; por lo que se puede avanzar en las ecuaciones que describen la materia a escalas atómicas; incluso cuando no se pueda explicar las mismas en término del lenguaje cotidiano.

9.1.6. La necesidad de una nueva teoría

Se está en presencia de ejemplos que muestran lo inapropiado de usar la mecánica clásica para la descripción de los fenómenos. Estos no sólo muestran la imprecisión de las leyes de movimiento sino la naturaleza inadecuada de los conceptos para describir los fenómenos a escalas atómicas.
En una descripción clásica de la materia uno intentaría explicar el comportamiento de un sistema en término de pequeñas partes constituyentes del mismo. Cada parte a su vez se la puede pensar constituida por otras partes más pequeñas. Este procedimiento se lo puede pensar iterativamente lo que conduciría a la necesidad de manejar una información infinita para describir cualquier pedazo finito de materia.
"Mientras *grande* y *pequeño* sean conceptos relativos, no será de ayuda explicar lo grande en término de lo pequeño. Es entonces necesario modificar las ideas clásicas de tal forma de dar un significado absoluto al tamaño". [Dir58](Dirac)
Es apropiado enfatizar que la ciencia trata de cosas observables, que podemos observar un objeto dejándolo interactuar con influencias externas. Por lo tanto, el acto de observación está, necesariamente, acompañado por alguna clase de disturbio del objeto observado. Se podría definir un objeto como grande, cuando los disturbios ocasionados por las observaciones pueden ser despreciados; y se podría definir un objeto como pequeño, cuando estos disturbios no pueden ser despreciados.
Todo esto nos conduce a pensar que existe un límite a la fineza de nuestro poder de observación y a la pequeñez del disturbio ocasionado; un límite que es inherente a las cosas y no puede ser subsanado por el avance tecnológico o la habilidad del observador.
También se deduce que debemos acostumbrarnos a una indeterminación inevitable en el cálculo de resultados observacionales; la teoría nos permitirá calcular en general sólo la probabilidad de obtener un resultado particular cuando se hace una observación.

9.1.7. Dinámica cuántica

Estos y otros experimentos señalaron la necesidad de una nueva dinámica, fuera del marco teórico de la mecánica clásica. En los años 1925 y 1926 se presentaron formulaciones dinámicas debidas a Heisenberg y Schrödinger que establecieron las bases de una nueva dinámica que dan fundamento a la llamada *mecánica cuántica*. En la llamada ecuación de Schrödinger se describe la evolución de una función de onda que se interpreta usualmente que contiene la información para calcular la probabilidad de encontrar al electrón en algún estado cuántico dado.
Como ha ocurrido con la introducción de otros marcos teóricos, la mecánica cuántica ha demandado de parte de los físicos el esfuerzo por abrazar una nueva manera de percibir la realidad. En este nuevo marco teórico, la noción de partícula ya no tiene un significado puntual como se tenía anteriormente. En particular ya no se usa la noción de velocidad en la dinámica; pues se prevé usar sólo la noción de momento.
No discutiremos detalles de la dinámica cuántica, pues escapa a lo que deseamos cubrir en este libro, pero mencionaremos que la misma incluye el llamado *principio de incerteza*, que para el par de coordenadas x y momento p_x ; establece que la imprecisión Δx en la determinación de x y la imprecisión Δp_x en la determinación de p_x están relacionadas por la desigualdad

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}. \qquad (9.4)$$

Esto implica que no se pueden determinar ambas cantidades con infinita precisión al mismo tiempo.

9.2. Niveles de energías continuas de dos partículas clásicas con carga eléctrica

En primera instancia, uno podría intentar hacer un modelo atómico con lo aprendido de la mecánica clásica. Lo más sencillo, entonces sería hacer un modelo clásico de un cuerpo central con carga eléctrica *Ze*, donde *Z* es un número entero y *e* es la carga eléctrica (tomada como positiva) del electrón. Si una partícula clásica (no cuántica) con carga *-e* está ubicada a una distancia *r* de este centro, tendrá una energía coulombiana electrostática dada por

$$\mathbf{U}_{clas.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)(-e)}{r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}; \qquad (9.5)$$

donde ε_0 es la constante eléctrica que aparece en el Apéndice A.
Notar que el potencial coulombiano electrostático *V* para una carga *Ze* está dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)}{r}; \qquad (9.6)$$

por lo que la ecuación anterior se puede expresar por

$$\mathbf{U}_{clas.} = V(-e); \qquad (9.7)$$

o sea, el producto del potencial electrostático por la carga eléctrica. Una unidad usual para los potenciales electrostáticos es el volt. A la energía que corresponde

un salto de un volt aplicado a la carga de un electrón e se la llama *electrón-volt* y se la denota con eV.
La energía total del sistema es

$$E_{clas.} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathbf{U}_{clas.}. \tag{9.8}$$

Para un movimiento circular de esta partícula, es posible calcular la energía cinética en término de la energía potencial, dado que de la ecuación de movimiento newtoniana en la dirección radial se tiene:

$$ma = m\frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \tag{9.9}$$

donde primeramente se ha usado la relación entre aceleración y velocidad para un movimiento circular uniforme y luego se ha usado la ecuación de Coulomb para la fuerza entre dos cargas Ze y $-e$ que están a una distancia r. Entonces deducimos que para el caso del movimiento circular la energía total del sistema clásico está dado por:

$$E_{clas.} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}. \tag{9.10}$$

En la mecánica clásica uno puede elegir libremente la posición y velocidad inicial para un movimiento; por lo que en principio se pude elegir el valor de r arbitrariamente. Esto como consecuencia, implica que los valores de la energía $E_{clas.}$ pueden tomar cualquier valor de entre un continuo de posibilidades.
Esta no es la realidad que se observa en la física atómica.

9.3. Niveles de energías discretos de un electrón en el átomo de hidrógeno

El átomo de hidrógeno es el átomo más simple, dado que su núcleo sólo consta de un protón y por lo tanto tiene un solo electrón.
Cuando se excita un átomo, éste emite un fotón al volver a un estado con menos energía. Del estudio del espectro del hidrógeno se notó una serie regular que fue explicada por la llamada serie de Balmer; que determina la longitud de onda de los fotones emitidos, y está dada por

$$\frac{1}{\lambda_{2,n}} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right); \tag{9.11}$$

donde n puede adoptar los valores 3, 4, . . . y R_H es la llamada constante de Rydberg con valor $R_H = 10.973.731\frac{1}{m}$. Esta serie se generalizó luego a

$$\frac{1}{\lambda_{m,n}} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right); \tag{9.12}$$

con $m = 1, 2, 3, \ldots$ y $n > m$. El caso $m = 1$ se la llama serie de Lyman.
Un modelo que se puede adaptar a la situación del átomo de hidrógeno es el que corresponde al resolver la ecuación de Schrödinger para el caso de una fuente ubicada en el origen con carga Ze ; donde Z es un número entero que indica la cantidad

de carga positiva que tiene el núcleo y e es la carga eléctrica del electrón. La solución a este problema da un espectro discreto de energías para los estados ligados del electrón, cuyos valores son

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}; \qquad (9.13)$$

donde m es la masa del electrón y n puede adoptar los valores 1, 2, 3,... En el caso del átomo de hidrógeno se debe tomar $Z = 1$; siendo el nivel más bajo de energía el dado por

$$E_0 = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2} = -2,17 \times 10^{-18} J = -13,6\, eV; \qquad (9.14)$$

que se denomina estado fundamental. Esta es la llamada energía de ionización del átomo de hidrógeno; pues es la energía que se debe entregar al átomo para arrancarle su electrón.
Es importante notar que la ecuación (9.12) es compatible con la ecuación (9.13).

Ejercicio 9.1 Expresar y calcular la constante de Rydberg en término de otras constantes.

Ejercicio 9.2 Suponga un fotón que tiene la energía suficiente para arrancar el electrón de un átomo de hidrógeno. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón? ¿Está dentro del espectro visible?

9.4. Comportamiento de los electrones en la materia

Hasta aquí, en este capítulo, hemos estado considerando átomos de a uno y electrones de a uno. Pero en esta sección extenderemos la discusión a efectos colectivos de los electrones en la materia, como por ejemplo es el fenómeno de la corriente eléctrica.

9.4.1. Clasificación de materiales de acuerdo a su conductividad

Por ser el electrón una partícula con carga eléctrica, es sometido a las interacciones electromagnéticas.
En particular, sobre una pequeña partícula con carga eléctrica q moviéndose con velocidad $\vec{v}$, actúa la fuerza de Lorentz dada por

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right); \qquad (9.15)$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los campos eléctricos y magnéticos respectivamente, actuando sobre la partícula. El símbolo × representa el producto vectorial, también conocido como producto cruz, o producto cruzado entre vectores.
Vemos, entonces que desde un punto de vista clásico (no cuántico) si en el interior de un material existe un campo eléctrico $\vec{E}$, un electrón libre, pero dentro del material, estaría sometido a la acción de una aceleración en la dirección (opuesta) del campo eléctrico. Si el campo eléctrico fuese constante dentro del interior del cuerpo, deduciríamos que la velocidad de los electrones libres dentro del material aumentaría con el tiempo; lo que implicaría un aumento de una corriente eléctrica macroscópica con el tiempo. Sin embargo, esto no es lo que se observa.

Supongamos que en el seno de un material se tiene n partículas por unidad de volumen con carga q que se mueven con velocidad $\vec{v}$, luego, definimos la densidad de corriente eléctrica $\vec{j}$ por la expresión

$$\vec{j} = qn\vec{v}\,. \tag{9.16}$$

Al someter a estas cargas a un campo eléctrico, no se observa un aumento constante de la densidad de corriente eléctrica sino que se observa la relación

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}\,; \tag{9.17}$$

conocida como la ley de Ohm. La constante σ es la llamada *conductividad eléctrica* del material.

En la vida cotidiana estamos más acostumbrados a hablar de la corriente eléctrica, más que de la densidad de corriente. Consideremos un material en forma cilíndrica de longitud L y sección s como indica la figura 9.1. En este caso sólo importa la densidad de corriente en la dirección del eje del cilindro, por lo que nos referiremos al módulo j del vector $\vec{j}$. La corriente I que corre por este material está dada por

Figura 9.1. Material de forma cilíndrica de longitud L y sección s.

$$I = js\;; \tag{9.18}$$

donde podemos notar que las unidades de I están dadas por [carga/unidad de tiempo]. La unidad usual de corriente eléctrica es el ampere con símbolo A.

Si a lo largo del cilindro hay un campo eléctrico de módulo E, entre los extremos del cilindro hay una diferencia de potencial V dada por

$$V = EL\,. \tag{9.19}$$

De aquí que la ley de Ohm se escribe usualmente en la forma

$$V = RI\;; \tag{9.20}$$

donde en este caso el factor R está dado por

$$R = \frac{L}{\sigma s}\,, \tag{9.21}$$

que se llama *resistencia eléctrica* del cuerpo. Vemos que la resistencia aumenta con la longitud y cuando disminuye la sección.

La unidad para los saltos de potenciales es el volt. La unidad natural para las resistencias es, entonces el volt/ampere que se denomina ohm y se suele usar el símbolo Ω.

Los materiales que tienen una conductividad eléctrica, relativamente, alta se denominan buenos conductores. En contraposición los materiales que tienen una conductividad eléctrica relativamente baja se los llama aislantes o malos conductores. Como veremos más adelante, esta clasificación no acaba con todos los tipos de materiales.

En realidad, además de conductores y aislantes, también existen los *semiconductores*; que son materiales con propiedades peculiares respecto de las corrientes eléctricas. Por otro lado, a muy bajas temperaturas es posible observar los fenómenos de superconductividad.

Ejercicio 9.3 Usando que la conductividad eléctrica del cobre es σ=5,8×10$^7 \frac{1}{\Omega m}$, calcule la resistencia de un cable de cobre de 5 m de largo con una sección de 1 mm cuadrado.

Ejercicio 9.4 Si a un cable de cobre de 2,5 m de largo con una sección de 1mm cuadrado se le aplica una diferencia de potencial en sus extremos de 0,05 V, ¿cuántos electrones cruzan una sección del cable por segundo?

9.4.2. Corrientes eléctricas en conductores

En general los metales son buenos conductores, por lo que se los usa para el transporte de corriente eléctrica.
El trabajo ΔW hecho para mover una carga q una pequeña distancia Δx es

$$\Delta W = F\,\Delta x = \delta q E \Delta x = \delta q \Delta V; \qquad (9.22)$$

donde ΔV es la diferencia de potencial $E\Delta x$.
Luego la potencia P que se debe entregar al sistema para mantener la corriente eléctrica es:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\delta q}{\Delta t}\Delta V = I\,\Delta V; \qquad (9.23)$$

de donde se puede chequear que ampere × volt=watt. Si usamos la ley de Ohm (9.20) esta ecuación se puede expresar por

$$P = RI^2. \qquad (9.24)$$

9.4.3. Generación de corrientes eléctricas

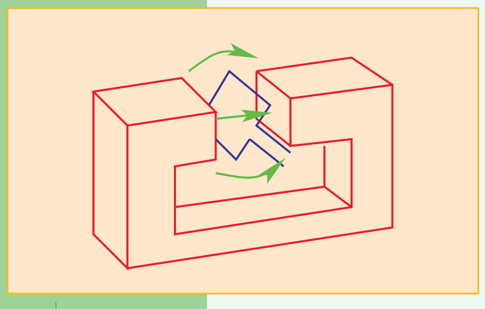
- **Generación de corriente continua**

Una corriente continua se genera cuando se mantiene una diferencia de voltaje permanente en un conductor. Por ejemplo, si se tiene un circuito eléctrico formado por unos cables que están conectados a una lamparita y a una pila o batería; se generará una corriente continua que provocará que la lamparita emita luz.

- **Generación de corrientes alternas**

Es muy conveniente la generación de corrientes alternas por medio de los efectos explicados por la llamada *ley de inducción de Faraday*. En el siglo XIX, Faraday comprobó, experimentalmente, que el voltaje inducido en un circuito es proporcional a la variación de flujo magnético, encerrado por el circuito. Una manera muy sencilla de obtener esto es manteniendo algunos imanes permanentes cerca de una espira y hacer girar la espira. Al girar, la espira experimentará una variación de flujo magnético lo que a su vez inducirá una diferencia de voltaje que generará una corriente eléctrica por la espira. Esta es la forma que funciona una dínamo, como se muestra esquemáticamente en la figura 9.2.
Un generador que funcione de esta manera proveerá de una corriente alterna, pues en un momento el flujo atraviesa la espira en un sentido y en otro medio ciclo el flujo es en el sentido opuesto. La corriente que se usa en el sistema eléctrico de suministro para hogares e industria, consiste en corriente alterna. En nuestro país se usa corriente de 220 V y ciclos de 50 Hz; o sea, la corriente cambia de dirección 50 veces por segundo.

Figura 9.2.
Esquema del funcionamiento de una dínamo. Un imán permanente genera un campo magnético (flechitas verdes) que atraviesan el interior de una espiral conductora (en color azul), que gira respecto de un eje de simetría perpendicular al campo magnético.
Respecto de la espira, la misma observa un flujo de campo magnético variable con el tiempo; lo que genera una fuerza electromotriz sobre la misma.



Capítulo 10

Energía en sistemas gravitatorios relativistas

10.1. Partículas de prueba en relatividad general

10.1.1. Introducción a la relatividad general, principio de equivalencia (global)

Un concepto fundamental en la mecánica desarrollada por Newton, es el de punto material o partícula. Cada punto material está caracterizado, en principio, por un número que describe sus propiedades inerciales; a este número se le llama masa inercial. Ésta es la constante que figura en la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m_I \, \vec{a}, \qquad (10.1)$$

que aparece multiplicando a la aceleración de la partícula.
Cuando las partículas están sujetas a las interacciones gravitatorias, en principio, se necesitaría otra constante asociada al punto material para caracterizar sus propiedades dinámicas; dado que la fuerza gravitatoria tiene la forma:

$$\vec{F} = m_G \, \vec{g}, \qquad (10.2)$$

donde m_G es la masa gravitacional y $\vec{g}$ el campo de aceleración gravitatorio.
Se deduce de las observaciones de Galileo que existe una relación constante entre las masas inerciales y gravitacionales para diferentes objetos. Esta propiedad ha sido verificada por otros experimentos; pero es particularmente célebre el experimento de Roland von Eötvös, quien mostró que la relación m_G/m_I no varía en más de 10^{-9} de una sustancia a otra. Es así que se identifica la masa inercial y la masa gravitatoria y uno se refiere simplemente a la masa de una partícula. Es notorio que esta identificación estuvo ya incluida en la ley de la gravitación para puntos materiales sugerida por Newton; quien propuso la siguiente ecuación de movimiento para un conjunto de partículas sujetas a interacciones gravitatorias:

$$m_i \frac{d^2\vec{X}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j \, m_i \, (\vec{X}_j - \vec{X}_i)}{\left|\vec{X}_j - \vec{X}_i\right|^3}, \qquad (10.3)$$

donde m_i es simplemente la masa de la partícula i y $\vec{X}_i$ sus coordenadas cartesianas. Estas ecuaciones son invariantes ante el llamado grupo galileano; que es el grupo de transformaciones entre sistemas inerciales.
Cuando la electrodinámica fue comprendida y James Clerk Maxwell (1831-1879) presentó las ecuaciones que la describen, se reconoció que estas ecuaciones no son invariantes ante transformaciones de Galileo. En aquella época se pensó que tal vez las ecuaciones de Maxwell eran válidas sólo en una clase particular de sistemas de referencia. Es así que el propio Maxwell introdujo la idea de un éter que sería identificado con el espacio absoluto de Newton y de esta manera proveería de una salida

a este problema de la invariancia de las ecuaciones.

Por un momento la introducción del éter de Maxwell pareció resolver el problema; pero los experimentos de Michelson y Morley (1887) demolieron la idea alrededor de la introducción de un éter. Más aún, se halló que las ecuaciones de Maxwell eran invariantes ante un grupo distinto de transformaciones, las llamadas transformaciones de Poincaré.

Una clarificación importante de la nueva mecánica implicada por estas transformaciones se debe a Albert Einstein (1879-1955), quien desarrolló lo que hoy se conoce como la teoría de la relatividad especial. Uno de los pilares fundamentales de esta teoría es el principio que establece que las leyes de la física deben ser invariantes ante transformaciones lineales entre sistemas inerciales. Luego, como las ecuaciones de Maxwell son leyes de la física, estas transformaciones lineales deben ser las transformaciones de Poincaré.

El grupo de Poincaré está constituido por las transformaciones de Lorentz y las cuatro posibles traslaciones.

Vale la pena enfatizar que la diferencia fundamental entre la mecánica newtoniana y la visión de la relatividad especial de la estructura del espaciotiempo es que, mientras en la imagen newtoniana todas las perturbaciones son instantáneamente detectadas por el resto del Universo, en la visión de la relatividad especial aparece una velocidad máxima para la transmisión de información.

En relación con esto hemos probado, anteriormente, que las transformaciones de Lorentz se pueden deducir del principio de la relatividad y de la suposición de una velocidad máxima finita para la propagación de información.

La situación era, entonces que la cinemática de partículas y la electrodinámica eran invariantes ante la acción del grupo de Poincaré, pero la teoría de la gravitación newtoniana no lo era. Por lo tanto era clara la necesidad de una nueva teoría de la gravitación que no contradijese el resto de las ideas físicas.

La teoría de la relatividad general es la teoría de la gravitación que resolvió este dilema y contiene un cambio dramático en la noción del espaciotiempo con respecto al punto de vista proveniente de la mecánica newtoniana y aún de la relatividad especial.

Para tener una idea clara de la naturaleza de los nuevos conceptos que fueron introducidos, es conveniente evocar algunos de los pensamientos originales que dieron nacimiento a esta teoría.

En 1911, cinco años antes de la presentación de la teoría de la relatividad general, A. Einstein publicó un artículo con el título: *"Sobre la influencia de la gravitación en la propagación de la luz"* [Ein52]. En este artículo él explica una hipótesis sobre la naturaleza física del campo gravitatorio; para cuyo propósito la siguiente situación física fue considerada. Asumamos un campo gravitatorio homogéneo, con aceleración de la gravedad g; donde uno puede definir un sistema de coordenadas estacionario K de tal forma que la aceleración gravitatoria apunta en la dirección negativa del eje z. Consideremos otra situación en la cual no hay campo gravitatorio y un sistema K' se está moviendo con aceleración uniforme g en la dirección positiva del eje z de un sistema inercial. Las trayectorias de los puntos materiales en los sistemas K y K' estarán determinadas por las ecuaciones:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g. \qquad (10.4)$$

Es importante enfatizar que estas ecuaciones se aplican a situaciones físicas que aparentan ser diferentes. Sin embargo, uno obtiene una explicación satisfactoria del experimento de Galileo, correspondiente a la igual caída de distintos objetos en el campo gravitatorio, si se asume que los sistemas K y K' son físicamente equivalentes; en otras palabras, si la aceleración gravitatoria g se entiende equivalentemente como producida por la aceleración del sistema K. Bajo estas consideraciones uno debe permitir ahora la posibilidad de aceleraciones arbitrarias entre sistemas de referencia; en contraste con el principio de relatividad restringida que sólo permite velocidades constantes arbitrarias entre sistemas de referencia.

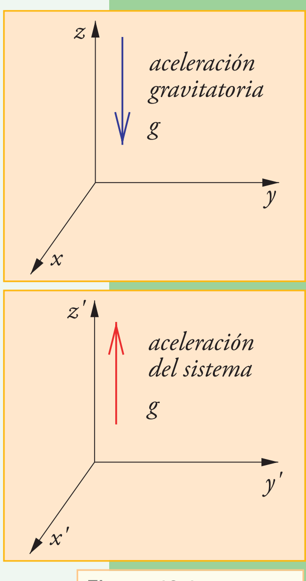


Figura 10.1.
El campo gravitatorio del sistema ***K*** provoca fenómenos equivalentes a los fenómenos observados en el sistema ***K'*** que está acelerado.

La equivalencia entre los sistemas K y K' es, ciertamente, válida si uno se restringe a procesos, puramente mecánicos donde es aplicable la descripción newtoniana. Sin embargo, uno arriba a la formulación de un nuevo principio, el llamado *principio de equivalencia* (global), si se asume la equivalencia física de los sistemas K y K' con respecto a todos los procesos físicos. Este principio es muy poderoso y elaboraremos seguidamente algunas de sus consecuencias sugeridas en 1911; pero en la sección que sigue formularemos al principio de equivalencia de una manera más precisa, como es empleado en la relatividad general. Antes de proseguir conviene enfatizar que este principio no debe ser considerado como afirmaciones que gobiernan la trayectoria de partículas con respecto a sistemas Galileanos; sino que el sistema K' debe ser considerado como acelerado respecto de un sistema inercial en el contexto de la relatividad especial. Este es el punto de vista que se adoptará en el tratamiento de los ejemplos siguientes.

10.1.2. Relación entre la energía y la masa gravitatoria

Consideremos dos sistemas materiales S_1 y S_2 que están localizados sobre el eje z del sistema K con una distancia h entre ellos; de tal forma que el potencial gravitatorio en el sistema S_2 es mayor, por una cantidad

$$\Delta\Phi = gh \qquad (10.5)$$

que el correspondiente al sistema S_1 cuando la radiación es emitida desde S_2. Si se desconoce un comportamiento definido de la radiación bajo la influencia del campo gravitatorio, es difícil formular alguna afirmación acerca de la energía que será medida por S_1 debido a la emisión de radiación desde S_2. Es muy útil en esta situación hacer uso del principio de equivalencia entre los sistemas K y K'; de tal manera que uno puede estudiar este proceso en un sistema inercial K_0 donde no aparecen aceleraciones gravitatorias. Supongamos que al tiempo de emisión la velocidad relativa de K' respecto de K_0 es cero; o en otras palabras que S_1 y S_2, que se asumen acelerados en la dirección positiva del eje z en K_0, están en reposo al tiempo de emisión. Al momento en que la radiación arriba a S_1, la velocidad de S_1 respecto de K_0 será en primera aproximación

$$v = g\,\frac{h}{c}; \qquad (10.6)$$

donde c es la velocidad de la luz. Luego la radiación medida por S_1 tendrá, en primera aproximación, la energía dada por la ecuación (7.14); esto es

$$E_1 = E\left(1+\frac{v}{c}\right) = E\left(1+g\frac{h}{c^2}\right). \qquad (10.7)$$

Debido al principio de equivalencia la misma relación matemática vale en el sistema K, que tiene la aceleración gravitatoria g. Reemplazando gh por $\Delta\Phi$ en las ecuaciones anteriores, se obtiene para K la relación:

$$E_1 = E + \frac{E}{c^2}\Delta\Phi; \qquad (10.8)$$

de donde se observa que la cantidad $\frac{E}{c^2}$ se comporta como una masa gravitacional. Esto, a su vez, puede ser entendido como la equivalencia entre la masa inercial y gravitatoria; dado que uno sabe que a una cantidad de energía E le corresponde una masa inercial, $\frac{E}{c^2}$ como se desprende del estudio de la cinemática en el contexto de la relatividad especial.

10.1.3. Mediciones del tiempo en presencia de un campo gravitatorio homogéneo

Supongamos que la radiación emitida desde S_2 tiene frecuencia ν relativa a un reloj en S_2; luego uno espera que la frecuencia medida en S_1 sea mayor. En efecto, refiriéndonos al sistema K_0, se puede ver fácilmente que si al tiempo de emisión S_1 y S_2 estaban en reposo, al tiempo de absorción S_1 medirá una frecuencia diferente debido al efecto Doppler; dado que S_1 se estará moviendo hacia S_2 con velocidad v. Por lo tanto se tiene

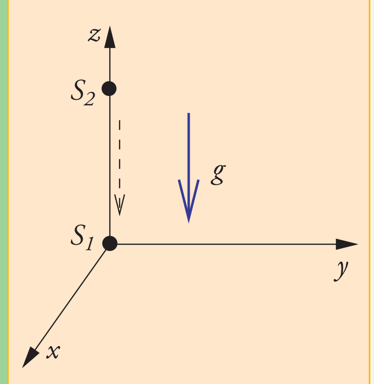


Figura 10.2.
Debido a la equivalencia entre un sistema con un campo gravitatorio con otro que se acelera; se deduce que los relojes del sistema S_2 y del sistema S_1 no se pueden sincronizar en presencia de un campo gravitatorio.

$$\nu_1 = \nu\left(1+g\frac{h}{c^2}\right). \qquad (10.9)$$

Debido a la equivalencia de los sistemas K y K' se deduce que la relación entre las frecuencias de absorción y emisión de la radiación estará dada por

$$\frac{\nu_1}{\nu} = 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}, \qquad (10.10)$$

donde $\Delta\Phi$ es la diferencia de potencial gravitatorio entre los sistemas. Pero esto conduce a la siguiente cuestión: la medida de frecuencias se puede asociar al conteo de valles y crestas del paquete de onda bajo estudio; luego como las medidas de frecuencias son diferentes se debe concluir que los relojes marchan a distinto ritmo. Claramente la relación entre los ritmos de los relojes está dada por el factor $\left(1+\frac{\Delta\Phi}{c^2}\right)$. Más precisamente, pensemos en que la medida de frecuencia es equivalente a contar n crestas de la onda; luego se tiene

$$\nu_1 = \frac{n}{\Delta t_1} \quad y \quad \nu = \frac{n}{\Delta t_2}; \qquad (10.11)$$

por lo que se tiene

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \qquad (10.12)$$

Ejercicio 10.1 Un buen día el mellizo Alberto decide retirarse a meditar en la soledad de las alturas del cerro Champaquí, que está a 2.790 m sobre el nivel del mar (snm). Pone su reloj atómico a cero y parte desde la puerta oeste de FaMAF, que está a 440 m snm.
Jaimito, el otro mellizo, para no ser menos, decide retirarse a meditar en la soledad de las alturas del cerro Aconcagua, que está a 6.960 m snm. Jaimito también pone a cero su reloj atómico al mismo tiempo que Alberto y también parte en ese instante desde el mismo lugar.
Otro reloj atómico es dejado en FaMAF, con la misma sincronización del cero.
Al cabo de un año, según el reloj dejado en FaMAF, se reúnen los mellizos en el lugar de partida.
a) ¿Qué tiempo marca el reloj de Alberto?
b) ¿Qué tiempo marca el reloj de Jaimito?

10.1.4. Curvatura de los rayos luminosos en presencia de campo gravitatorio

Asumamos que un rayo luminoso es emitido de S_2 perpendicular al eje z con respecto al sistema K_0 en el momento que S_1 se encuentra en el origen de coordenadas y S_2 se halla a una distancia h en la dirección positiva del eje z. Al momento de emisión tanto S_1 como S_2 se encuentran en reposo. Imaginemos que en el plano $z = 0$ hay copias del sistema S_1 uniformemente distribuidas las cuales están sujetas a trayectorias aceleradas como las del sistema S_1. Luego un poco más tarde, al tiempo Δt, algunos de estos sistemas interceptará el rayo luminoso. A este tiempo Δt las copias del sistema S_1 se mueven con velocidad $v = g\, t$.

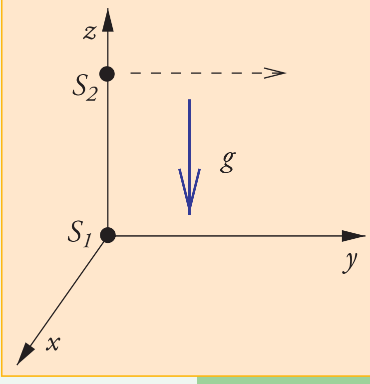


Figura 10.3.
Debido a la equivalencia entre un sistema con un campo gravitatorio con otro que se acelera; se deduce que un rayo de luz se curvará en presencia de un campo gravitatorio.

Está claro que a un tiempo $\Delta t'$ del sistema K' el rayo luminoso alcanza al plano $z' = 0$ a un determinado ángulo $\Delta\alpha$. Despreciando términos de orden $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ se tiene $\Delta t' = \Delta t$ y luego

$$\Delta\alpha = -\frac{v}{c} = -\frac{1}{c} g\, \Delta t. \qquad (10.13)$$

Debido a la equivalencia de los sistemas K y K' se deduce que los rayos luminosos se curvan en presencia de campos gravitatorios.
El fenómeno de la curvatura de los rayos de luz cuando pasan cerca de grandes distribuciones de masa, genera los efectos de lentes gravitacionales. En la figura 10.4 se muestra una foto astronómica de un ejemplo de lente gravitacional.

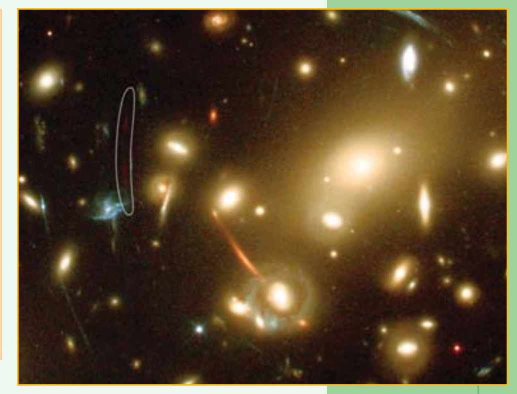


Figura 10.4.
Foto de lente gravitacional tomada por el telescopio espacial Hubble. La fotografía muestra aspectos del cúmulo de galaxias Abell 2218; donde se ven varias imágenes deformadas en forma de arco de galaxias que están detrás del cúmulo. El cúmulo es tan masivo y compacto que ejerce su influencia sobre los rayos luminosos que provienen de objetos detrás del mismo. En algunos casos, no sólo distorsiona la imagen sino que también puede provocar un aumento de luminosidad aparente, lo que permite detectar objetos distantes que de otra forma serían invisibles al instrumento. Tal es el caso de los objetos encerrados en los lazos de línea blanca, que señala la detección de galaxias extremadamente distantes.

10.2. Observaciones locales

10.2.1. El principio de equivalencia

Las consideraciones anteriores se refieren a un campo gravitatorio estático y uniforme; que corresponde a una idealización extrema de un sistema gravitatorio. Sin embargo, todo campo gravitatorio regular cuando es observado en una vecindad muy pequeña de un punto en el espaciotiempo se asemejará cada vez más a un campo gravitatorio estático y uniforme. Es por ello que se espera que las consideraciones anteriores sean aplicables a una región muy pequeña en un campo gravitatorio arbitrario.
Para formular estas ideas en una manera más precisa introduzcamos la noción de *sistemas inerciales locales* y *observaciones locales* respecto de un punto p del espaciotiempo.

P 10.1 Principio de existencia de los sistemas inerciales locales

Existe un conjunto de sistemas de coordenadas, definidos alrededor del punto p, para los cuales las trayectorias de partículas de prueba son líneas rectas hasta el segundo orden en la separación de las coordenadas al punto p. A estos sistemas se los denomina sistemas inerciales locales.

Cuando una observación depende linealmente de las coordenadas rectangulares de un sistema inercial local que tiene como origen un cierto punto p, diremos que la *observación* es *local*. Cualquier otra observación se llamará no local.
Formularemos el Principio de equivalencia de la siguiente manera:

P 10.2 Principio de equivalencia

No se puede distinguir por medio de observaciones locales entre un sistema de referencia en presencia de un campo gravitatorio y un sistema de referencia que está apropiadamente acelerado con respecto a un sistema inercial local.

Es importante reconocer algunos de los puntos implicados por estos principios. Para comenzar, se asume la posibilidad de construir sistemas inerciales locales alrededor de cualquier punto del espaciotiempo. Nos preguntamos, entonces ¿cuál es la estructura implicada por esta posibilidad? De la definición de sistemas inerciales locales se tiene que las ecuaciones de las líneas rectas deben ser invariantes en los primeros dos órdenes en la separación de las coordenadas del punto p, bajo transformaciones entre sistemas inerciales locales. Luego se deduce que las transformaciones permitidas entre sistemas inerciales locales, alrededor del mismo punto p, deben ser homogéneas y lineales; además, como estas transformaciones deben ser compatibles con la estructura de las ecuaciones de Maxwell, estas transformaciones tienen que ser las transformaciones de Lorentz. Más precisamente, si y^a son las coordenadas de un sistema inercial local, donde el índice a denota ordenadamente las cuatro coordenadas, y si y'^a son las coordenadas de otro sistema inercial local alrededor del mismo punto p, entonces se tiene:

$$y'^a - y'^a_p = \Lambda^a{}_b\left(y^b - y^b_p\right) + 0 + O\left(\left(y^a - y^a_p\right)^3\right); \quad (10.14)$$

donde estamos usando la notación usual relativista por la cual se sobreentiende que índices repetidos se suman, $\Lambda^a{}_b$ es una transformación de Lorentz, el símbolo de orden $O(x^n)$ significa que $\lim_{x\to 0} \frac{O(x^{n+1})}{x^n} = 0$, y donde se ha enfatizado que no hay un término correspondiente al segundo orden en la separación de las coordenadas. Esto significa que en cada punto p se tiene la estructura de la relatividad especial en los primeros dos órdenes en la separación de las coordenadas.

Por lo tanto se podría decir que el principio 10.1 implica que el espaciotiempo se construye con una colección de espaciotiempos de la relatividad especial locales (en primer y segundo orden). Este nuevo espaciotiempo tiene en general una nueva característica que se llama *curvatura*.

Los fenómenos de curvatura implican que las leyes de la geometría plana, como la de Euclides, sólo valen en un sentido local. Esto es análogo a lo que ocurre cuando uno observa una región local de una superficie esférica. En una región muy pequeña, por ejemplo la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. En vez en una región grande, esto no es cierto; como indica la figura 10.5.

Se puede deducir también que la ecuación de movimiento de una partícula de prueba respecto de un sistema de coordenadas arbitrario. Comencemos por notar que en un sistema inercial local la trayectoria de las partículas de prueba es gobernada por la afirmación que la aceleración instantánea debe ser cero; o sea, por las ecuaciones:

$$\left.\frac{d^2y^a}{d\lambda^2}\right|_p = 0, \qquad (10.15)$$

donde λ es una parametrización apropiada de la trayectoria. Sea ahora x^a un sistema de coordenadas arbitrario, que puede ser curvilíneo y acelerado, luego uno puede expresar las funciones y^a en término de las coordenadas x^a, y las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\frac{d^2x^a}{d\lambda^2} + \Gamma_b{}^a{}_c \frac{dx^b}{d\lambda}\frac{dx^c}{d\lambda} = 0. \qquad (10.16)$$

Figura 10.5.
Los teoremas de la geometria euclidiana no valen en espacios curvos. Por ejemplo: la suma de los ángulos de un triángulo deja de ser 180°.

Se observa entonces que, en un sistema de coordenadas arbitrario, las trayectorias de las partículas de prueba están determinadas por las cantidades $\Gamma_b{}^a{}_c$.

No estudiaremos en esta ocasión cuál es la relación que las cantidades $\Gamma_b{}^a{}_c$ tienen con la estructura del espaciotiempo; pero sí diremos que estas ecuaciones son las llamadas *ecuación de geodésica* que son las que determinan las trayectorias *más rectas posibles* en un espacio curvo.

Recapitulando, entonces vemos que los principios antes expuestos implican:

I) La gravedad es un fenómeno geométrico que se manifiesta en la estructura del espaciotiempo. El espaciotiempo es una variedad lorentziana que en general es curva.

II) Las líneas mundo de las partículas de prueba son geodésicas del espaciotiempo.

Se suele hacer la distinción entre principio de equivalencia débil, que es esencialmente la afirmación II), y el principio de equivalencia fuerte, que es el que hemos introducido y se aplica a todos los procesos físicos. La versión fuerte es también llamada el principio de Einstein. Se conoce como la conjetura de Schiff la afirmación que dice: toda teoría de la gravitación completa autoconsistente que contiene al principio de equivalencia débil necesariamente contiene al principio de equivalencia fuerte.

10.2.2. Medición de la energía de un rayo luminoso por dos observadores estacionarios en un campo gravitatorio central

La energía E de los fotones está relacionada con su frecuencia ν por medio de la relación $E = h\nu$; por lo que es equivalente medir energías o frecuencias de rayos luminosos.
Sea un cuerpo estacionario con simetría esférica que es fuente de los campos gravitacionales en su alrededor; y que por lo tanto determina la estructura del espaciotiempo.
Supongamos que en el punto p_1 del espaciotiempo el observador estacionario 1 emite un rayo de luz con frecuencia ν_1; y que otro observador estacionario 2 detecta el rayo en el punto p_2 con frecuencia ν_2.
Sin entrar en detalles de cuál es la estructura global y local del espaciotiempo, diremos que las frecuencias están relacionadas por

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}}}; \qquad (10.17)$$

donde r_1 y r_2 son las posiciones de los observadores respecto de la coordenada radial r que caracteriza las superficies con simetría esférica que rodean al cuerpo central. En particular la superficie $A(r)$ de una esfera denotada por la coordenada r está dada por la ecuación habitual $A(r) = 4\pi r^2$. La constante G es la constante de la gravitación universal y el parámetro m representa la masa del cuerpo central.
Esta ecuación también da la relación entre las medidas de tiempo entre uno y otro observador. Si llamamos $\Delta\tau_1$ y $\Delta\tau_2$ los intervalos de tiempo entre crestas de la onda medidos por un y otro observador; se tiene que

$$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 \sqrt{\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}}}; \qquad (10.18)$$

luego si $r_1 < r_2$ se tiene $\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$; por lo que el reloj del observador 1 parecería funcionar más lento que idéntico reloj portado por el observador 2.
Debido a esto, si dos observadores estaban inicialmente juntos en la posición 1 y luego el observador 2 va 'rápidamente' a la posición espacial 2; donde permanece un 'largo' lapso de tiempo y luego regresa a la posición 1; la diferencia de los lapsos de tiempo estará determinada por la ecuación (10.18).

Ejercicio 10.2 Usando las aproximaciones para x mucho menor que 1 ($x << 1$):

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x, \qquad (10.19)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \qquad (10.20)$$

probar la ecuación (10.12) usando (10.18) con $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$.

10.3. Agujeros negros

Consideremos el problema de estimar la velocidad de escape de un objeto del campo gravitatorio terrestre. Desde el punto de vista newtoniano es conveniente considerar la ecuación que da la energía de un pequeño objeto respecto de otro muy masivo; que es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r_f}. \qquad (10.21)$$

Para que el objeto escape es necesario que pueda alcanzar distancias muy grandes; por lo que se pretende que r pueda tender a infinito; para lo cual es necesario que la energía sea cero o positiva. Si el radio de la Tierra es R_T y su masa M_T, se tiene la ecuación para la velocidad de escape v_e de la condición $E = 0$; esto es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}. \qquad (10.22)$$

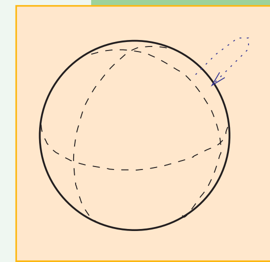


Figura 10.6.
Se tira un objeto con una velocidad inicial alcanzando una distancia máxima desde el centro de la Tierra.

Si en vez de la Tierra consideramos otro astro de masa M y radio R se tiene

$$\frac{v_e}{c} = \sqrt{\frac{2GM}{c^2R}}. \qquad (10.23)$$

Vemos entonces que es posible que exista una combinación de masa y radio que haría que la velocidad de escape fuese mayor que la velocidad de la luz; esto indica que en un astro de estas características la luz no podría escapar del mismo, debido a que nada puede viajar más rápido que la velocidad máxima de las interacciones. Esta condición para el radio está dada por

$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2}; \qquad (10.24)$$

y se lo llama radio de Schwarzschild.

Si bien de un agujero negro no puede escapar ni siquiera la luz, los objetos que caen a un agujero negro pueden emitir radiación electromagnética en este proceso. Es de esta forma que normalmente se detectan candidatos de cuerpos astrofísicos que tienen los parámetros característicos de un agujero negro.

En el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, se encuentra un agujero negro supermasivo. Se denomina de esta forma a cuerpos de esta clase que tienen una masa mucho mayor que la masa solar. En efecto, el agujero negro en el centro de nuestra galaxia tiene aproximadamente 2,6 millones de masas solares.

La figura 10.8 muestra sobre el lado derecho, el gráfico de la órbita de una estrella alrededor del agujero negro supermasivo; datos del European Southern Observatory (ESO).

Al presente, en la página http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/index.php?lang=en del Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik, se pueden obtener videos donde se muestra el movimiento de estrellas alrededor del agujero negro súper masivo en el centro de la galaxia.



Figura 10.7.
Agujero negro rodeado por disco de polvo.

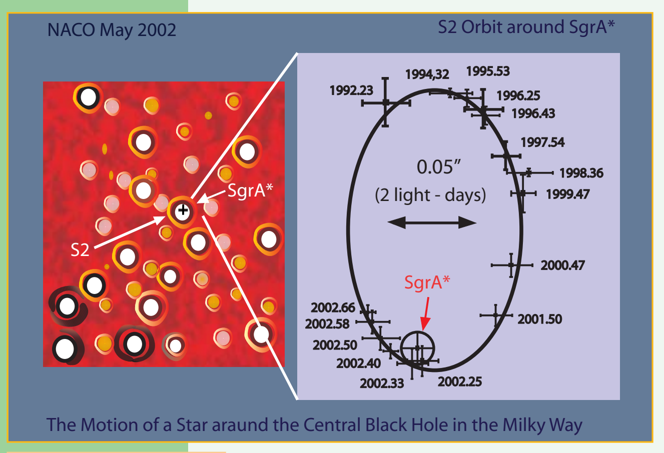


Figura 10.8.
Agujero negro súper masivo en el centro de nuestra galaxia.

Ejercicio 10.3 Si compactásemos los siguientes objetos a esferas de radios r, ¿qué radios deberían tener para formar un agujero negro?

a) Un barco de 100.000 toneladas.

b) La Tierra.

c) El Sol.

d) 2,6 millones de soles.

10.4. Relación entre: energía de fotones, frecuencia de fotones y tiempo propio

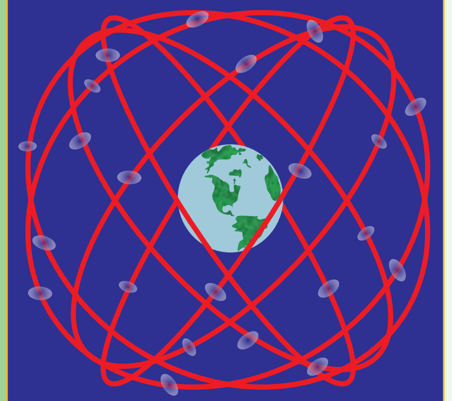
10.4.1. Comparación de tiempo propio de distintos observadores

Hemos señalado anteriormente que la energía E de un fotón está relacionada con su frecuencia ν por la ecuación $E = h\nu$. Por otro lado un observador mide las frecuencias en término de $\frac{\text{ciclos}}{\Delta\tau}$; esto es, calcula la relación entre el número de ciclos medidos dividido por el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau$.
Esto nos permite encontrar una manera de comparar los tiempos propios medidos por observadores que están en un espaciotiempo curvo. Para ello deben medir la frecuencia de un mismo rayo de luz, o de una señal electromagnética.
En lo que sigue aplicaremos esto a una breve descripción del funcionamiento del sistema de posicionamiento global.

10.4.2. Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

Equipamiento básico del sistema GPS

Figura 10.9.
Esquema de las órbitas de los satélites que conforman el sistema GPS.



El Sistema de Posicionamiento Global usa una constelación de al menos 24 satélites operacionales.
El sistema de la fuerza aérea de los Estados Unidos está operacional desde el 27 de abril de 1995.
Cada satélite lleva consigo relojes atómicos. Cada satélite emite señales que están sincronizadas con los relojes que porta.
Cada emisión se puede considerar como un evento en el espaciotiempo influido por la distribución de masa de la Tierra.
La constelación de satélites es controlada por estaciones sobre la superficie de la Tierra que chequean la sincronización de los relojes como los parámetros de la órbita de cada uno de ellos.
Los satélites se encuentran en órbita unos 20.000 km sobre la superficie de la Tierra, con una inclinación de unos 55° con res-

pecto al plano ecuatorial, como se indica en la figura 10.9.
Los satélites transmiten en dos bandas; la L1 de 1575,42 Mhz, equivalente a una longitud de onda de 19,0294 cm y la L2 de 1227,6 Mhz, equivalente a una longitud de onda de 24,4210 cm.
Los receptores GPS de uso civil sólo reciben en la banda L1.
Los relojes que llevan los satélites tienen una precisión de 5 partes en 10^{14}; o equivalentemente en un día una precisión de 4 nanosegundos.

Relación entre tiempo propio de un satélite del GPS y el tiempo propio de un reloj en la Tierra

Los receptores que poseen los usuarios del sistema GPS son pequeños dispositivos que reciben las señales de los satélites en órbita.
Los satélites están como a unos 20.000 km sobre la superficie de la Tierra; lo que implica que hay una diferencia en el potencial gravitatorio entre los emisores de los satélites y los receptores de los usuarios.
Además se debe agregar que por estar en órbita, estos satélites tienen una velocidad considerable comparada con la velocidad usual de un usuario sobre la superficie de la Tierra. Esto implica que se deben tener en cuenta también las diferencias en frecuencias provocadas por el efecto Doppler.
La gran precisión de sistema GPS se logra sólo si se tienen en cuenta todos los efectos que contribuyen a que las frecuencias de los emisores y receptores sean distintas.
Los aparatos receptores tienen incluidos algoritmos que permiten tomar en cuenta estas diferencias; con lo que se logra la precisión deseada.

10.4.3. Sincronización de relojes sobre la superficie de la Tierra

Pensemos en un conjunto de observadores, cada uno con su reloj, que están distribuidos sobre la superficie de la Tierra. Debido a que la Tierra rota, debemos entender los efectos que pueden surgir en el proceso de sincronizado de los relojes. Para simplificar supongamos que la superficie de la Tierra es esférica y consideremos primeramente los efectos debido a la relatividad espacial; o sea, despreciando los efectos gravitatorios por el momento.

Despreciando los efectos gravitatorios

Asumamos que disponemos de un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) para determinar puntos en el espacio; de tal manera que el sistema inercial completo consta de las coordenadas (t, r, θ, φ), con el que definimos el sistema K.
Supongamos que otro grupo de observadores se ha puesto de acuerdo para realizar una rotación con velocidad angular constante alrededor del eje z original, o sea incrementando la coordenada φ; de tal manera que usan un sistema no inercial de coordenadas que se relaciona con el primero por medio de:

$$t = t', \quad r = r', \quad \varphi = \varphi' + \omega t', \quad \theta = \theta'; \qquad (10.25)$$

donde ω es la velocidad angular de rotación.
Si denotamos con τ el tiempo propio de cada uno de los observadores que está en

el sistema rotante, entonces la relación entre tiempo propio y coordenada temporal t' está dada por

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r'^2 sen^2(\theta')}{c^2}\right) dt'^2. \qquad (10.26)$$

Si a y b son dos observadores del sistema rotante; denotaremos sus tiempos propios con τ_a y τ_b respectivamente. Si se desea sincronizar los relojes de estos observadores, se debe tener que

$$d\tau_a = d\tau_b\,; \qquad (10.27)$$

por definición de sincronización.
La ecuación (10.26) nos indica que no se podrán sincronizar dos relojes fijos a una superficie esférica en rotación para distintos ángulos polares θ'; esto es distintas latitudes. Pero por otro lado notamos que se podrían sincronizar relojes sobre una superficie tal que

$$\left(1 - \frac{\omega^2 r'^2 sen^2(\theta')}{c^2}\right) = constante \qquad (10.28)$$

o sea, sobre las superficies de cilindros de radios $r'\text{sen}(\theta')$.
Pero además debemos notar que existe otro efecto. Aunque no entraremos en detalles, señalamos que no es lo mismo sincronizar relojes en la dirección de la rotación que en la dirección opuesta. Esto se conoce como el efecto Sagnac.

Tomando en cuenta los efectos gravitatorios

Ahora supongamos que existe un cuerpo masivo estacionario central y que arreglamos para que un conjunto de observadores rote con velocidad angular constante; similarmente a lo explicado recién. En particular asumiremos nuevamente que la relación entre un sistema de coordenadas no rotante y rotante está dado por las ecuaciones (10.25).
Debido a la existencia de un objeto central estaremos en presencia del potencial newtoniano Φ. Para el caso de la Tierra el potencial está dado aproximadamente por

$$\Phi = -\frac{GM}{r}\left(1 + J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(cos\,(\theta))\right); \qquad (10.29)$$

donde J_2 es la magnitud del momento cuadrupolar, a es el radio ecuatorial de la Tierra y $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ es el polinomio de Legendre de grado dos.

Un reloj en reposo sobre la superficie de la Tierra midiendo un tiempo propio τ, está relacionado con la coordenada temporal t' por la expresión

$$d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{\omega^2 r'^2 sen^2(\theta')}{c^2}\right) dt'^2. \qquad (10.30)$$

Reproduciendo la discusión anterior sobre la sincronización de relojes, vemos que podremos sincronizar relojes sobre equipotenciales del potencial efectivo

$$U \equiv \Phi - \frac{1}{2}\omega^2 r'^2 sen^2(\theta'). \qquad (10.31)$$

La superficie equipotencial U_0 que pasa por el Ecuador se la llama geoide. El valor numérico de $\frac{U_0}{c_2}$ está dado por

$$\frac{U_0}{c^2} = -\frac{GM}{c^2 a} - \frac{GM}{c^2 a} J_2 - \frac{\omega^2 a^2}{2c^2}$$

$$= -6{,}95348 \times 10^{-10} - 3{,}764 \times 10^{-13} - 1.203 \times 10^{-12}$$

$$= -6{,}96927 \times 10^{-10}. \qquad (10.32)$$

Debido a que este valor es pequeño, vemos que la relación entre el tiempo de los relojes, sobre esta equipotencial, y la coordenada temporal *t*' se puede calcular de la expresión aproximada

$$d\tau = \left(1 + \frac{U_0}{c^2}\right) dt'. \qquad (10.33)$$

La precisión de los relojes atómicos es del orden de 10^{-14}; por lo que este efecto es 10.000 veces mayor que la estabilidad fraccional de los relojes

10.5. Emisión de energía en forma de radiación gravitacional

Es bien conocido que cargas eléctricas aceleradas emiten radiación electromagnética. Análogamente, la teoría relativista de la gravitación predice que un sistema gravitatorio en general emitirá radiación gravitatoria. Esta radiación gravitatoria, implicará la pérdida de energía total del sistema, y el cambio de momento y momento angular.

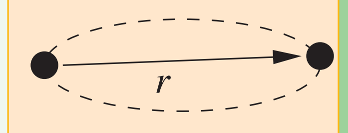


Figura 10.10. Sistema de dos partículas en órbitas circulares a distancia *r* una de otra.

Un ejemplo de sistema que puede emitir radiación gravitatoria es un sistema binario ligado, como indica la figura 10.10. Un sistema como este al ir perdiendo energía, iría cambiando su configuración haciendo que la distancia *r* entre los cuerpos fuese disminuyendo.

10.5.1. El pulsar binario PSR B1913+16

Hace más de treinta años, en 1975, Hulse y Taylor descubrieron el pulsar binario [HT75] PSR B1913+16.

Un pulsar es una estrella de neutrones que es observada por los pulsos electromagnéticos que emite. Una estrella de neutrones tiene un poco más de la masa del Sol, pero tiene un radio de sólo unos 10 km. Es por esto que los campos gravitatorios cerca de una estrella de neutrones son muy altos.

El hecho de que el pulsar sea binario, significa que tiene una compañera, con la que está ligada gravitacionalmente.

En 1992, tuvimos la oportunidad de atender la charla [GKM93] de J. H. Taylor, cuando organizamos la conferencia GR13 en las sierras de Córdoba.

En 1993, Russell Hulse y Joseph Taylor recibieron el Premio Nobel, por su descubrimiento.

Este sistema provee del primer caso en el cual se puede testear la pérdida de energía debido a la emisión de radiación gravitacional.

Similarmente al fenómeno de radiación electromagnética; cuando un sistema gravitante cambia con el tiempo, puede emitir ondas gravitacionales.

Ejercicio 10.4 Considere una estrella de neutrones con una masa igual a 1,6 la masa del Sol y con un radio de 10 km.

a) Calcule la aceleración gravitatoria en la superficie de la estrella de neutrones.

b) ¿A qué velocidad se debería arrojar una bala para que pueda escapar de la estrella?

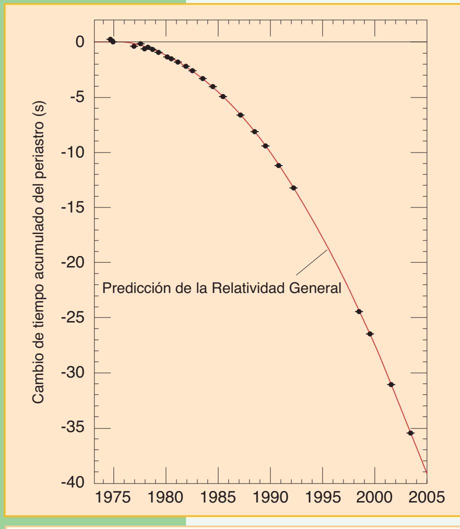
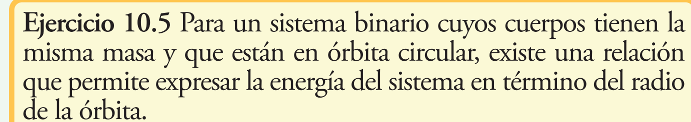


Figura 10.11.
Decaimiento de la órbita del pulsar PSR B1913+16 como función del tiempo. Los puntos indican los datos de la época del periastro, o punto de mayor acercamiento, mientras que la línea continua es al cálculo teórico de la relatividad general, para un sistema binario que emite radiación gravitatoria.



Ejercicio 10.5 Para un sistema binario cuyos cuerpos tienen la misma masa y que están en órbita circular, existe una relación que permite expresar la energía del sistema en término del radio de la órbita.

a) Exprese la energía en término del radio de la órbita para este sistema.

b) Asumiendo que en cada revolución se pierde una cantidad muy pequeña de energía ϵ por radiación gravitacional, encuentre una relación entre la variación del radio δr y ϵ.

c) Asumiendo los datos del punto anterior encuentre una relación entre la variación del período de la órbita δT y ϵ.

Para el sistema binario, la existencia de la radiación gravitatoria, significa que algunos parámetros de sus órbitas serán afectados.

La figura 10.11 muestra la variación del período de la órbita del sistema binario PSR B1913+16 como función del tiempo. Los puntos significan datos observacionales, mientras que la curva continua muestra la predicción teórica de la relatividad general; por lo que se tiene una excelente concordancia.

10.5.2. Efecto de las ondas gravitacionales

Supongamos tres objetos que están suspendidos del techo de una habitación como indica la figura 10.12. Al pasar una onda gravitacional en la dirección del eje vertical, producirá una variación relativa de las distancia entre los objetos; de tal forma que cuando un par de los objetos, sobre uno de los brazos, se acerca, el otro par de objetos, sobre el otro brazo, se alejan. Alternándose este movimiento entre un par y el otro.

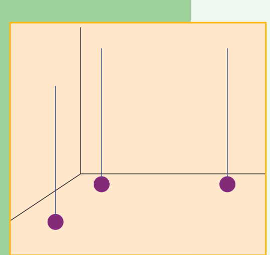


Figura 10.12.
Esquema de tres objetos suspendidos, acomodados en los extremos de una L.



10.5.3. Detectores de ondas gravitacionales

Con el objeto de medir las ondas gravitacionales se han construido y están en construcción varios detectores en el mundo.

La idea en estos detectores, es medir las distancias entre espejos, por medio de técnicas interferométricas de láser que rebotan entre los mismos. La configuración usual es una construcción en forma de L, con espejos en los extremos y en el ángulo, como muestra la figura 10.13. Al combinar los haces de luz de los dos brazos se produce un patrón de interferencia con lo que se intenta medir la variación de la distancia relativa entre los espejos, provocada por el paso de una onda gravitacional. Al presente se han construido varios observatorios gravitacionales interferométricos que serían capaces de detectar *radiación gravitacional* proveniente de algunos sistemas astrofísicos particulares. Sin embargo, se debe aclarar que todavía no se

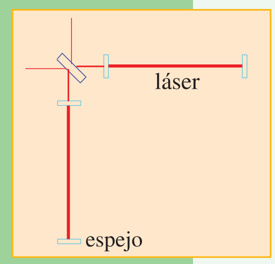


Figura 10.13.
Esquema de un detector interferométrico. En los extremos de dos brazos en forma de L se suspenden espejos. Un láser es inyectado en el sistema que lo separa para que se refleje en los dos brazos de la construcción en forma de L. Por métodos de interferometría se desea medir las distancias relativas entre los espejos, comparando la longitud de los brazos.

ha realizado una observación directa de dicha radiación gravitatoria.

Hay varios detectores en el mundo, algunos de ellos en construcción. Entre los detectores interferométricos está el GEO que es un detector de 600 m de lado cerca de Hannover en Alemania y es una colaboración germano-británica, el LIGO que son dos detectores de 4 km de lado en Hanford y Livingston en Estados Unidos, el TAMA de 300 m de lado cerca de Tokyo en Japón, y el VIRGO de 3 km de lado cerca de Pisa en Italia y es una colaboración francés-italiana. Hay algunos detectores de barra en operación. También está el proyecto LISA para un interferómetro en el espacio.

El detector VIRGO está administrado por el European Gravitational Observatory, que es un consorcio ítalo-francés. En la figura 10.14 se muestra una vista aérea del detector VIRGO; mientras que en la figura 10.15 se muestra un detalle del interior de uno de sus brazos.

El Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) consiste de dos observatorios cuyos brazos miden 4 km. Uno de ellos está ubicado en el estado Louisiana y el otro en el estado Washington en Estados Unidos. En las figuras 10.16 y 10.17 se pueden ver fotografías aéreas del observatorio ubicado en Livingston, estado de Louisiana.

En nuestro grupo de investigación en FaMAF se estudia el problema de describir adecuadamente el perfil de las ondas gravitacionales que deberían medir estos detectores.



Figura 10.14.
Vista aérea del detector VIRGO de 3 km de lado, cerca de Pisa, Italia.



Figura 10.15.
Interior del detector VIRGO.



Figura 10.16.
Fotografía aérea de las instalaciones del observatorio de ondas gravitacionales por interferometría láser LIGO, ubicado en Livingston, Louisiana, Estados Unidos.



Figura 10.17.
Fotografía aérea de las instalaciones centrales del observatorio de ondas gravitacionales por interferometría láser LIGO, ubicado en Livingston, Louisiana, Estados Unidos.

Capítulo 11

Energía en cosmología

11.1. Introducción histórica a la cosmología

11.1.1. Observaciones básicas del Universo

Se atribuye a Galileo el primer uso del telescopio para observaciones astronómicas. Previo a estos tiempos, el hombre sólo disponía de sus ojos como instrumentos para indagar sobre la naturaleza del cosmos. Las observaciones a simple vista nos muestran las fases diurnas y nocturnas del día; lo que logramos entender como la revolución de nuestro planeta sobre su eje y la presencia del Sol. En la fase nocturna es fácil distinguir la Luna, nuestro satélite, estrellas, agrupaciones de estrellas en diversas formas; siendo la más destacada la *Vía Láctea*.
Curiosamente, antes del uso del telescopio ya se distinguía la existencia de algunos de los planetas; aunque no se conociese bien su naturaleza en esa época. Ellos se podían diferenciar de las estrellas por su lento movimiento en el firmamento nocturno respecto del resto de las estrellas. Es así que Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno se pueden distinguir fácilmente de esta forma.
Respecto de la Vía Láctea, llevó mucho tiempo el entender su naturaleza. La Vía Láctea es nuestra propia *galaxia* vista desde adentro.
Una galaxia es la agrupación de mayor tamaño que forman las estrellas. En las galaxias también se pueden encontrar gases y polvo; como así también agrupaciones menores de estrellas como los cúmulos estelares.
Sabemos que las otras estrellas son astros parecidos al Sol, pero que están mucho más lejos.

11.1.2. Sobre las unidades de distancia

En situaciones astronómicas se usan otras unidades de las que estamos acostumbrados para medir distancias, por lo que nos referiremos brevemente al tema.
La unidad de medida usual para longitudes es el metro, usado por el Sistema Internacional de Unidades. Sin embargo, para medir distancias astronómicas se usan otras unidades. La llamada unidad astronómica es, básicamente, la distancia media Tierra-Sol, denotada por u.a. y tiene el valor de u.a.=149.597.870, 66 km.
El *año luz* es la distancia que recorre la luz en el vacío en el lapso de un año; es así que aproximadamente un año luz=9.454.000.000.000.000 m. Por ejemplo, la distancia del Sol al sistema estelar más cercano, Alfa Centauro, es de aproximadamente 4,3 años luz. La estrella más cercana, Próxima Centauro, está a 4,22 años luz de nuestro sistema.
Otra unidad de medida que usan los astrónomos es el parsec; con la relación de que

un parsec=3,26 años luz.
En lo que sigue usaremos la unidad de años luz para las distancias.
Ahora que hemos adoptado una unidad de medida podemos responder a la pregunta:

¿a qué distancia está el centro de nuestra galaxia?

Está a aproximadamente 25.000 años luz. Por otro lado el radio de la galaxia se estima en aproximadamente 50.000 años luz. La galaxia tiene una forma aproximada de disco con brazos espirales en su interior. El espesor de la galaxia es difícil de medir pero se estima que es algo más de 5.000 años luz.

11.1.3. Sobre la naturaleza de las galaxias

Una observación a simple vista del cielo nocturno, aquí en el hemisferio sur, nos permite ver la Vía Láctea y las nubes de Magallanes. Para poder verlas tenemos que estar en un lugar donde no haya iluminación artificial cercana y permitir que nuestros ojos se acostumbren a la visión nocturna. En la foto de la figura 11.1 se observa la Vía Láctea y la Nube Grande de Magallanes. Surge la pregunta natural:

¿qué clase de formación son las Nubes de Magallanes?

Por un lado, se podría creer que son agrupaciones de estrellas que están dentro de nuestra galaxia. Pero, un estudio detallado muestra que, en realidad, son galaxias menores, que están en la vecindad de la nuestra. En efecto, la distancia a la Nube Grande de Magallanes es de unos 169.000 años luz; lo que la ubica fuera de nuestra galaxia.
En el hemisferio norte se puede observar otro objeto nebuloso en la constelación de Andrómeda, que hoy reconocemos como la galaxia de Andrómeda, que está a unos 2.000.000 años luz de nosotros.
La clarificación sobre la naturaleza de los objetos nebulosos observados por los astrónomos, sólo comenzó hace menos de un siglo. En abril de 1920, en una reunión de la Academia Nacional de Ciencias en Washington D.C. se presentó un debate [Kip87] sobre si los objetos nebulosos que presentaban forma espiral eran objetos cercanos dentro de nuestra galaxia, o eran objetos lejanos similares a nuestra propia galaxia.
Pocos años después se pudo probar, de trabajos de Edwin Powell Hubble (1889-1953), que la nebulosa de Andrómeda, efectivamente, estaba fuera de nuestra galaxia aunque, originariamente, la ubicó más o menos a la mitad de su distancia real.
Se llegó así a la conclusión que, tanto había objetos nebulosos dentro de nuestra galaxia como galaxias que aparentan ser objetos nebulosos por la gran distancia a la que están. De esta manera se dedujo que la estructura del Universo a gran escala estaba dominada por la distribución de galaxias en el mismo. De la observación de las galaxias cercanas se puede encontrar que las mismas están separadas por una distancia promedio de unos 350.000 años luz.
A muy gran escala la distribución de galaxias parece ser más o menos homogénea. Pero a escalas menores se observan agrupaciones que forman estructuras. Un ejemplo es el llamado cúmulo de Virgo; éste es un *cúmulo de galaxias* que contiene aproximadamente unas 2.500 galaxias. El cúmulo de Virgo está aproximadamente a 60.000.000 años luz.

11.1.4. La paradoja de Olbers

Figura 11.1. Visión del cielo nocturno sobre el cerro Paranal en Chile. Además de la Vía Láctea se observa la Nube Grande de Magallanes hacia la derecha de la foto.

En las distintas estaciones del año, notamos que podemos ver distintas constelaciones; las cuales no cambian de forma. Tampoco se observa que la Vía Láctea cambie de forma ni lugar relativo respecto de las constelaciones. O sea, las estrellas distantes, la Vía Láctea, las nebulosas cercanas, las galaxias aparentan tener un lugar fijo en la esfera celeste.

Esta observación invita a pensar que tal vez el Universo está formado por una distribución estática de galaxias, cada una con sus millares de estrellas y nebulosas locales. Pero si esto es así; entonces surge también la llamada paradoja de Olbers. En 1823, Wilhelm Olbers (1758-1840) envía un artículo a publicar que plantea el siguiente interrogante: si el Universo está formado por una distribución ilimitada y estática de galaxias, las cuales albergan estrellas; entonces en cualquier dirección que mirásemos tarde o temprano encontraríamos una estrella. Por lo tanto desde ese punto del firmamento vendría luz proveniente de la superficie de una estrella. Pero esto sería cierto para todo punto en la esfera celeste. Por lo que se esperaría que de todo punto del cielo, sea de día o de noche, deberíamos ver luz con la intensidad que vemos la luz del Sol.

Todo esto obviamente contradice el hecho que el cielo nocturno (o sea cuando no está el Sol) es oscuro. Por lo cual se deduce que el Universo no puede estar formado por una distribución ilimitada y estática de galaxias.

En realidad, estas ideas fueron presentadas previamente [Kip87] por el astrónomo suizo Jean-Philippe de Loys de Cheseaux (1718-1751) en un libro; por lo que probablemente no se le debería haber puesto el nombre de la paradoja de Olbers; que nosotros no elegimos, sino que mencionamos con su nombre usual.

Una situación análoga, para entender la paradoja de Olbers, es pensar en un bosque como muestra la figura 11.2. Si se tratase de un bosque infinito, entonces, no importa qué dirección mirásemos siempre nuestra vista encontraría un árbol.

Figura 11.2. Fotografía del bosque de los arrayanes. Si el bosque fuese infinito, tarde o temprano nuestra vista encontraría la visión de un tronco (fotografía tomada por el autor).

Se podría pensar que la explicación más fácil para resolver esta paradoja sería asumir que existe algún tipo de materia entre las galaxias que, a pesar de ser muy tenue, absorbe la luz y especialmente oscurece la luz proveniente de las galaxias más lejanas. Pero en realidad, esto no resolvería el tema, dado que esta materia alcanzaría un equilibrio termodinámico con la radiación proveniente de las estrellas hasta alcanzar una temperatura semejante. De esta forma, terminaría emitiendo radiación similar a la que emiten las estrellas; por lo que nuevamente todo el cielo brillaría como la superficie de una estrella.

11.1.5. La expansión del Universo: la ley de Hubble

La explicación de la paradoja de Olbers llegaría por otro lado. Pero antes de presentarla debemos recordar el llamado efecto Doppler. Un ejemplo clásico del efecto Doppler es el que se detecta por un observador estacionario cuando pasa una locomotora, u otro vehículo, tocando una sirena. Mientras la locomotora se acerca al observador, notamos que el sonido se siente más agudo. En cambio, cuando se aleja, se nota que el sonido se percibe más grave. Esto se puede entender de la siguiente manera; el sonido emitido por una sirena se puede asumir como una perturbación periódica del aire, que tiene crestas y valles. Cuando la locomotora se acerca al observador, éste detecta digamos más crestas por segundo, que cuando la locomotora está quieta. En cambio, cuando la locomotora se aleja, el observador detectará menos crestas por segundo que cuando está quieta. Los mismos efectos se detectarían si la locomotora estuviese quieta y fuese el observador el que se mueve. En general, cuando la distancia entre observador y emisor disminuye con el tiempo, las frecuencias detectadas aumentarán y viceversa si las distancias aumentan con el tiempo, las frecuencias detectadas disminuirán.
Con la luz sucede un fenómeno análogo; de tal manera que cuando un emisor se aleja de un observador, éste detecta la luz más rojiza que la original. Mientras que si la distancia entre emisor y observador va disminuyendo con el tiempo, el observador verá una luz más azulada que la original. En la vida cotidiana, estos efectos sobre la luz son imperceptibles, debido a que las velocidades a que estamos expuestos son muy bajas. Pero estos efectos pueden ser notables si las velocidades involucradas son altas.
Todo esto quiere decir que se puede inferir el movimiento de acercamiento o alejamiento de las galaxias mediante el efecto Doppler. Esto es, en la medida que la luz proveniente de las galaxias tengan un corrimiento hacia el rojo a hacia el azul, podremos medir su velocidad. En general se observa que la mayoría de las galaxias muestran un corrimiento al rojo.
La pregunta que surge es:

¿muestran las distintas velocidades de las galaxias algún patrón?

Por ejemplo, se podría intentar relacionar la velocidad de recesión con su distancia. Esto nos lleva al problema de estimar las distancias a las galaxias. Esto no es una tarea fácil; pero la primera aproximación al problema podría ser suponer que las galaxias tienen más o menos el mismo tamaño. Luego, las galaxias más lejanas deberían verse más pequeñas. En 1924, Carl Wilhem Wirtz publicó un artículo donde anunciaba que había encontrado que las velocidades de recesión de las galaxias

aumentaban con la distancia a las mismas.
Posteriormente, en 1929, E. P. Hubble, usando un método más preciso para medir distancias, publica un artículo en el cual muestra que la relación entre velocidad y distancia es muy sencilla; es una relación lineal, de la forma:

$$\textit{velocidad de recesión} = H \times \textit{distancia}; \qquad (11.1)$$

donde H es la misma constante para todas las galaxias. A la constante H se la conoce desde entonces como la constante de Hubble y a la ecuación (11.1) como la ley de Hubble.
En aquel tiempo, se determinó el valor de la constante con mucho error. Al presente, el valor de la constante de Hubble observado es de aproximadamente 72 kilómetros por segundo por mega parsec, que se escribe como 72 km/s/Mpc. Notar que la unidad final del parámetro de Hubble es 1/s; dado que las unidades de distancia se cancelan.

¿Cuán universal es la ley de Hubble?

Se debe entender que la ley de Hubble es una ley fenomenológica aproximada. Las galaxias que están más lejos la cumplen en mayor medida. En cambio las galaxias que están más cerca y que por lo tanto deberían tener poca velocidad de recesión; están afectadas fuertemente por las interacciones gravitacionales entre sus vecinos cercanos. A modo de ejemplo se puede notar que la galaxia de Andrómeda se mueve hacia nosotros. Se dice que las galaxias tienen velocidades peculiares, debido a las interacciones cercanas, las que provocan pequeños desvíos de la ley de Hubble.

11.1.6. El principio cosmológico

A primera vista, esta observación del Universo, pareciese indicar que estamos en una situación privilegiada del mismo; pues todo parece alejarse de nosotros, como si tuviésemos alguna clase de repelente cósmico. Pero pensándolo un poco vemos que no tenemos motivo para pensar que estamos en una ubicación privilegiada. Como analogía pensemos que en un globo desinflado, como los que se usan en las fiestas de cumpleaños, hacemos marcas con una fibra, esparcidas por todo el globo. Supongamos que enchufamos el globo a un tubo de gas para inflarlo y observamos la posición de las marcas respecto de una de ellas en particular, a medida que el globo se está inflando. Lo que veremos es que las otras marcas se alejan de la elegida; sin que ninguna esté en el centro de nada. Si elegimos otra marca como punto de referencia, observaremos lo mismo.
La suposición de que no estamos ubicados en un punto especial del Universo, y que el mismo debe tener la misma apariencia desde cualquier punto de observación se lo conoce como el *principio cosmológico*.

11.2. Pasando la película para atrás: la gran explosión

11.2.1. La edad del Universo

Si la ley de Hubble, expresada en la ecuación (11.1) fuese constante en el tiempo, tendría una consecuencia inmediata. Esto surge de considerar la distancia a las otras

galaxias que satisfacen dicha ley. Inmediatamente concluimos que habrá un tiempo en el pasado en el cual todas las galaxias estaban juntas. Dicho de otra manera si las velocidades a las distintas galaxias es constante en el tiempo; entonces existe un único tiempo en el pasado en el cual las distancias a cualquiera de las galaxias nos darían cero.

¿Cuándo ocurrió esto, en que todas las galaxias estaban juntas?
¿Cuándo ocurrió esta gran explosión, el llamado "Big Bang"?

El cálculo de este tiempo ha ido variando al perfeccionarse nuestro conocimiento del Universo.
Actualmente se calcula que la gran explosión ocurrió hace unos 13.700.000.000 de años.
Esto es probablemente uno de los conocimientos más notables que haya alcanzado el hombre.
El Universo tiene un comienzo.
La idea de que el Universo tiene un comienzo, causa mucho escozor en general, tanto en la gente común como en los letrados. A tal punto que muchos han intentado salvar esta imagen con alguna teoría que pueda evitar este hecho.

11.2.2. El tamaño del Universo

Recordando que existe una velocidad máxima para las interacciones, y por lo tanto para la materia; y tomando en cuenta que existe un tiempo de origen del Universo, llegamos a la conclusión que no podemos obtener información de distancias infinitas, sino de una distancia finita. Esta distancia máxima es aproximadamente el producto de la edad del Universo, multiplicada por la velocidad de la luz. Ya hemos mencionado la edad del Universo anteriormente, por lo que deducimos que esta distancia máxima es 13.700.000.000 años luz. Este es el tamaño del Universo observable.
Se cree que hay aproximadamente 10^{11} galaxias en el Universo observable.

11.3. La radiación cósmica de fondo

¿Cuáles serían las consecuencias de que la gran explosión cósmica fuese asociada a una época de gran temperatura?

En la década de 1940, George Gamow, sugirió la posibilidad de que la gran explosión estuviese asociada a un evento de altas temperaturas. En una situación así se tendría que la materia y la radiación electromagnética tendrían la naturaleza del estado térmico determinado por la temperatura.
Sucede que la materia, a una dada temperatura, emite y absorbe radiación electromagnética caracterizada por dicha temperatura. Más aún, la radiación tiene una estructura particular, con un espectro cuyo máximo está determinado por la temperatura. Esto está asociado a la denominada *radiación de cuerpo negro* y al espectro se lo conoce como *espectro de Planck*. Así, por ejemplo, el Sol emite como un cuerpo negro cuya superficie está como a unos 6.000 grados centígrados. El máximo del espectro de radiación, para un cuerpo negro a esta temperatura, es casualmente dentro del espectro visible. Esto es, nuestro organismo se ha adaptado a vivir en un planeta cerca de

una estrella como el Sol; por lo que desarrolló un sistema de órganos sensoriales visuales que tienen detección máxima en el máximo del espectro de radiación.
Si bien al presente observamos una estructura en el Universo donde sobresalen las estrellas, los cúmulos estelares, las galaxias y los cúmulos galácticos; es concebible que en una época anterior el Universo mostraba una estructura distinta donde materia y radiación electromagnética estaban en equilibrio termodinámico y donde no se habían formado todavía estas grandes estructuras. Esto también está sugerido por el hecho de que las interacciones gravitatorias son atractivas; por lo que uno infiere que si al presente se tienen grandes concentraciones de materia, en un tiempo anterior, esta materia estaba desperdigada por el espacio de una manera más homogénea.
Cuando la temperatura es muy alta la materia no está en forma de átomos, sino que se la puede considerar una mezcla en que protones, neutrones, electrones y fotones están libres, chocando unos con otros. En un gas que se expande, sin perder calor, la temperatura va bajando. A medida que baja la temperatura se van formando los núcleos atómicos más livianos. Cuando la temperatura llega a unos 3.000 grados centígrados, gran parte de los electrones se asocian con los núcleos livianos que se han formado. En ese momento, las partículas que forman la materia son neutras; o sea, no tienen carga eléctrica. Cuando esto pasa, los fotones ya casi no chocan con la materia y el Universo se torna transparente. De esta forma los fotones forman un gas de radiación que no interacciona con el gas de la materia desde ese momento.
Si uno pudiese observar estos fotones, estaría obteniendo información de la época en que la radiación se desacopló de la materia. En particular, como el Universo está en expansión, obtendríamos información de materia que se está alejando de nosotros a gran velocidad; dado que está muy lejos. Debido al corrimiento al rojo, veremos la radiación de un cuerpo negro no a 3.000 centígrados, sino a una temperatura mucho menor.
La pregunta natural es, entonces:

¿se observa esta radiación cósmica?

La respuesta es afirmativa; pero la primera observación fue inesperada, como relatamos a continuación.
Un par de científicos, Arno Penzias y Robert Wilson, trabajando para la Bell Laboratory en Holmdel, Nueva Jersey, encontraron un exceso de ruido en una antena de micro ondas que estaban probando. Esta antena estaba diseñada para recibir señales del satélite Echo. En julio de 1965, estos autores publican en el Astrophysical Journal, un artículo de una página y media donde anuncian haber encontrado un exceso de ruido que se puede atribuir a una fuente con temperatura de 3,5 grados Kelvin [K]. Se usan los grados Kelvin para denotar la temperatura absoluta; que pone el cero en -273,15 grados centígrados.
Se le llama escala absoluta pues -273,15 grados centígrados es la temperatura mínima que puede tener un objeto, lo que en la escala absoluta coincide con 0 K. Un cuerpo a 0 K tendría todos sus átomos sin ninguna vibración térmica; por lo que alcanzada esta situación no se lo puede enfriar aún más.
En la Universidad de Princeton, también en el estado de Nueva Jersey, un grupo de investigación liderado por Robert H. Dicke había estado buscando esta radiación cósmica. Entre sus colaboradores estaba P. James E. Peebles. Otros dos investigadores del grupo,

Peter G. Roll y David T. Wilkinson se embarcaron en la tarea de medir la radiación cósmica de fondo. Cuando Penzias se entera de esta iniciativa del grupo de Princeton, se pone en contacto con ellos y les informa de lo que habían medido. El grupo de Princeton se dio cuenta que Penzias y Wilson habían observado la radiación cósmica de fondo. Por este motivo en la misma revista del Astrophysical Journal, aparece un artículo, firmado por Dicke, Peebles, Roll y Wilkinson, precediendo al de Penzias y Wilson, donde argumentan que el exceso de ruido detectado por Penzias y Wilson es la radiación cósmica de fondo, proveniente con igual intensidad desde distintas direcciones del espacio. El grupo de Princeton parece no haber tenido información del trabajo de Gamow, por lo que ellos no mencionaron a Gamow, ni a las investigaciones de su grupo.
Como una curiosidad, mencionamos que el Profesor Peebles ha venido a Córdoba en un par de ocasiones invitado por investigadores del Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de Córdoba. El autor ha tenido la oportunidad de asistir a uno de los cursos que dictó.
Como la observación de Penzias y Wilson fue realizada a una sola longitud de onda, lo que es lo mismo a una dada frecuencia; todavía quedaba por determinar si la radiación cósmica que se estaba detectando tenía el aspecto de la radiación termalizada; o sea, la correspondiente a la llamada radiación de cuerpo negro, mencionada anteriormente.
Posteriormente se hicieron una serie de observaciones con diferentes técnicas para confirmar la hipótesis de que verdaderamente se trataba de una detección de la radiación de fondo. Para ello era necesario corroborar que la radiación coincidiese con la "radiación de cuerpo negro". En los primeros años de la década del 90 finalmente se hicieron observaciones espectaculares que sin lugar a dudas confirmaron las sospechas. Estas observaciones se realizaron con un conjunto de instrumentos a bordo del satélite COBE (Cosmic Background Explorer). En 1992 tuvimos la oportunidad de recibir la primicia directamente de uno de los encargados de la observación, John C. Mather, durante el congreso GR13 (13th International Conference on General Relativity and Gravitation), llevado a cabo en La Falda, Argentina, que organizó nuestro grupo de investigación. Posteriormente, en 2006, George F. Smoot y John C. Mather recibieron el Premio Nobel de Física por estas observaciones.

Las observaciones del satélite COBE dejaron en claro varios puntos:
- **que la radiación cósmica de fondo correspondía a la de un cuerpo negro.**
- **que la temperatura de la radiación era de 2,728 ± 0,004 K.**
- **que tenía una componente dipolar; la cual se puede entender debido a que nos movemos respecto de la radiación cósmica de fondo.**
- **que sustraída la componente dipolar se observan variaciones de la temperatura de la radiación cósmica de fondo del orden de un cienmilésimo.**

Esta última contribución se la entiende como proveniente de la estructura de la distribución de materia al momento en que la radiación se separó de la misma.
Las últimas observaciones satelitales de la radiación cósmica de fondo se han realizado con el satélite que se lo conoce con el nombre de WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Este satélite fue lanzado al espacio en junio de 2001. De las observaciones del WMAP y de los modelos teóricos se entiende que:
- **la edad del Universo de 13.700.000.000 años.**
- **la constante de Hubble tiene un valor de 71,9 km/s/Mpc**

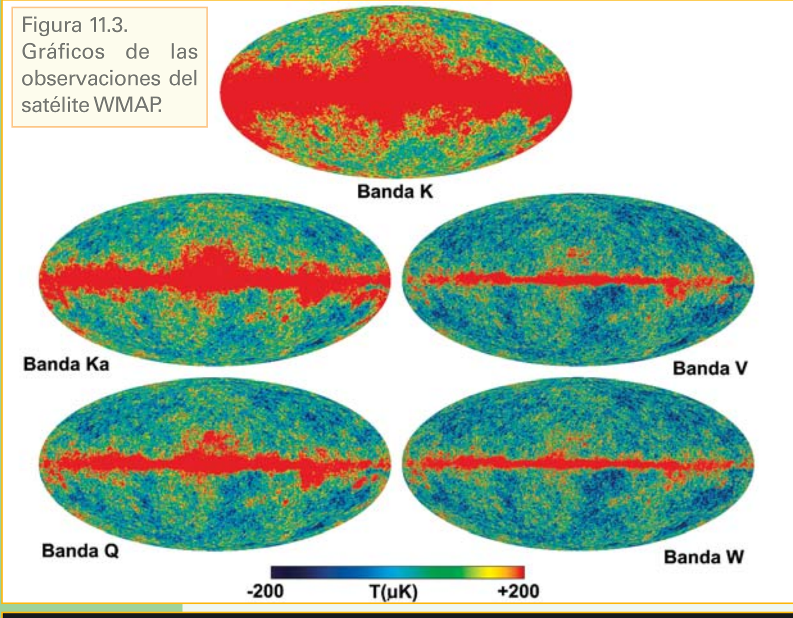


Figura 11.3. Gráficos de las observaciones del satélite WMAP.

Los gráficos de las observaciones de WMAP usando la proyección Mollweide se muestran en la figura 11.3. En estos gráficos se ha elegido como línea horizontal media al determinado por el plano de la galaxia; o sea, de la Vía Láctea. En el mismo se pueden ver las observaciones del satélite en distintas bandas; donde, debido a que estamos en el interior de nuestra galaxia, se dificultan las medidas cerca del plano de la misma; por ello aparecen las zonas rojas cerca de la línea horizontal media. Las observaciones fuera de la zona ecuatorial de nuestra galaxia muestran una estructura con variaciones del orden de un cienmilésimo de la temperatura media de la radiación cósmica de fondo.

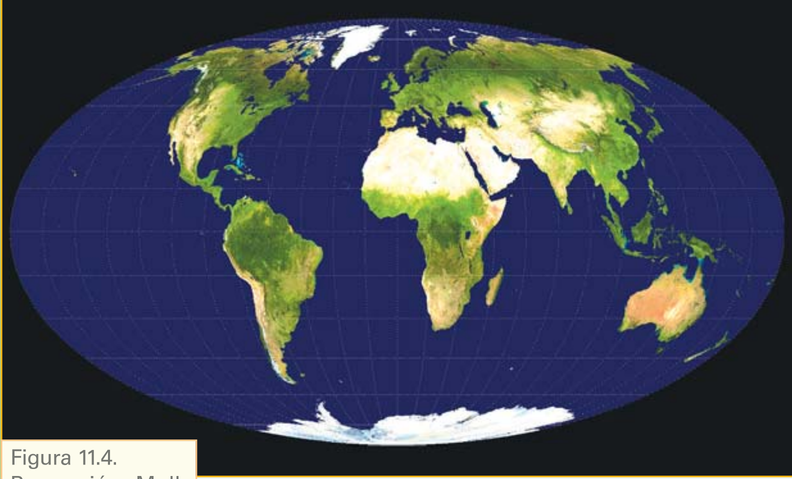


Figura 11.4. Proyección Mollweide de la superficie terrestre.

Los cosmólogos suelen graficar la información de la radiación cósmica de fondo de la esfera celeste haciendo uso de la llamada 'proyección de Mollweide'. Esta proyección, introducida por Karl Brandan Mollweide (1774-1825), permite graficar los puntos de una esfera en una porción de una superficie plana. Por ejemplo, cuando se usa la proyección Mollweide para los puntos de la esfera terráquea, se obtiene la figura 11.4. En este gráfico se toma como línea media horizontal al Ecuador; mientras que los polos pasan a estar en los puntos superior e inferior.

11.4. La abundancia cósmica de los elementos y la densidad de materia

11.4.1. Procesos nucleares a altas temperaturas

La imagen que tenemos del Universo es que en el pasado hubo una gran explosión donde las temperaturas eran extremadamente altas; digamos más de 10^{12} K. En tales condicio-

nes la materia estaba disociada en las partículas que la forman, para fijar ideas pensemos en una mezcla principalmente de protones, neutrones, electrones y otras partículas elementales. Los protones y los neutrones son las partículas que encontramos en los núcleos atómicos; los protones con carga eléctrica positiva y los neutrones con carga cero. Por otro lado los electrones forman en los átomos, una nube con carga eléctrica negativa, que hace que los átomos sean neutros.

A estas altas temperaturas no era posible tener núcleos atómicos pesados pues estos hubiesen sido desintegrados por los choques con las otras partículas. Pero a medida que el Universo se iba expandiendo y la temperatura descendía, fue termodinámicamente posible la formación de algunos núcleos atómicos livianos. En la tabla 11.1 mencionamos algunos de los núcleos atómicos livianos.

Núcleo	*protones*	*neutrones*
hidrógeno	*1*	*0*
deuterio	*1*	*1*
tritio	*1*	*2*
^{3}He	*2*	*1*
helio [He]	*2*	*2*
^{6}Li	*3*	*3*
litio [Li]	*3*	*4*

Tabla 11.1.
La segunda y tercera columna indican el número de protones y neutrones. El ^{3}He es un isótopo del helio; cuyo símbolo es He. En forma similar ^{6}Li es un isótopo del litio.

La llamada nucleosíntesis del Big Bang parece ofrecer uno de los métodos más confiables para obtener información de los primeros minutos del Universo. En ese tiempo se cristalizó la química cósmica que proviene de la gran explosión; siendo los elementos más abundantes el hidrógeno con una abundancia de aproximadamente el 75%, y el helio con una abundancia de aproximadamente el 25%; con muy poca incidencia del resto de los elementos.

Debido a que en las reacciones nucleares que se producen en las estrellas normales como el Sol, se generan núcleos más pesados que el hidrógeno; como así también en las explosiones estelares como las supernovas se producen núcleos más pesados todavía, cuando uno quiere observar la abundancia de los elementos primordiales se debe tener cuidado de observar en regiones que no presenten contaminación por la producción de estrellas o explosiones de estrellas.

El ajuste de la observación de los elementos primordiales con la teoría permite determinar parámetros que caracterizan la evolución del Universo. En particular por medio de estos cálculos se estima la cantidad de materia normal, llamada en cosmología materia bariónica; pues a los nucleones se los llama bariones, desde el punto vista de las clases de partículas. Se denomina Ω_B a la relación entre la densidad de masa bariónica ρ_B y la llamada *densidad crítica del Universo* ρ_c , que estudiamos a continuación.

11.4.2. Densidad crítica del Universo

En los modelos más sencillos del Universo, la densidad crítica es la que caracteriza la distinción entre densidades menores para los cuales la expansión sería ilimitada en el tiempo. En contraposición, para densidades mayores que la densidad crítica se tendría una expansión seguida de una etapa de colapso; dado que la alta concentración de materia no permitiría el 'escape' ilimitado entre vecinos. Para entender esto con un poco más de detalle, pensemos en la situación análoga del tiro vertical de un proyectil disparado por un cañón, en la superficie de un planeta. Esto nos conduce a la noción de *velocidad de escape*. Se llama así a la velocidad necesaria para que el proyectil se pueda alejar indefinidamente del planeta; por ejemplo, para la Tierra la velocidad de escape es de alrededor de 11 km/s. Esto quiere decir que si tuviésemos un cañón que pudiese disparar un proyectil a 14 km/s, entonces este proyectil no volvería a la superficie de la Tierra. Pero ahora supongamos que pudiésemos achicar al tamaño de la Tierra, o sea, disminuir su radio. Como la fortaleza de la aceleración gravitatoria en la superficie depende del

radio del planeta, a medida que lo achicamos, crece la aceleración gravitatoria en la superficie. De la misma manera, crece el valor de la velocidad de escape. Esto quiere decir, que existirá un radio, lo suficientemente pequeño, tal que la velocidad de escape sea mayor que la velocidad que provee nuestro cañón. A medida que achicamos al planeta, le estamos aumentando la densidad media; por lo que vemos que existirá una densidad media crítica tal que por encima de la misma, nuestros proyectiles no podrán escapar del planeta. Si bien esta es una analogía, nos da la idea básica de por qué debe existir una densidad crítica del Universo asociada a una velocidad de expansión; que está determinada por la llamada constante de Hubble. La densidad crítica está dada en término de la constante de Hubble H por $\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2$ donde G es la constante de la gravitación y π el número pi, cuyo valor es aproximadamente 3,14159. Recordando que anteriormente vimos que H = 72 km/s/Mpc, se tiene que el valor de la densidad crítica es aproximadamente de $\rho_c = \frac{(3 \times (2,3334 \times 10^{-18})^2)}{(8 \times 3,14159 \times 6,674 \times 10^{-11})} \frac{kg}{m^3} = 9.738 \times 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$. Éste es un número extremadamente pequeño; tomando en cuenta que la masa de un protón es $m_p = 1,673 \times 10^{-27}$ kg, vemos que la densidad crítica del Universo equivale a tener unos 6 átomos de hidrógeno por metro cúbico. Estos niveles de baja densidad no se pueden lograr ni en los más avanzados laboratorios de la Tierra cuando se desea hacer el mejor de los vacíos. Siendo que la densidad crítica parece ser tan baja cuando se compara con densidades de la vida cotidiana, en primera instancia uno pensaría que seguramente la densidad media del Universo es mayor que esta densidad crítica. Pero, en realidad debemos considerar que estamos en la superficie de un planeta, que está en un sistema solar, en una galaxia y que hay mucho espacio sin materia visible entre las galaxias.

Volviendo a la densidad de la materia normal, o bariónica, el cálculo y las observaciones de la abundancia cósmica de los elementos, daría un valor de:

$$\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_c} \approx 0,04. \qquad (11.2)$$

Esto indica que no hay densidad de materia normal suficiente para provocar un recolapso del Universo.

Sin embargo hay indicaciones que sugieren que hay en el Universo más materia que la materia bariónica. Por ello es que es frecuente escuchar sobre la llamada materia oscura. Las indicaciones de que probablemente hay más materia que la bariónica provienen de varios tipos de estudios. En escalas galácticas, de la observación de las velocidades de rotación en galaxias espirales. En escalas mayores, de la dinámica de galaxias en cúmulos galácticos. Además hay evidencias que provienen de las llamadas *lentes gravitacionales*.

El fenómeno de lentes gravitacionales se produce cuando la luz pasa muy cerca de una gran concentración de masa, de tal forma que afecta la trayectoria de los rayos luminosos; ocasionando un efecto parecido al que produciría una lente ubicada en el mismo sitio. Recordar las discusiones de la sección 10.1.4.

Además de la materia oscura, en los últimos tiempos también se está hablando de energía oscura. Con este último término se señala la posible necesidad, aún de otra clase de fuente que probablemente esté afectando la geometría y expansión del Universo. La manera más sencilla de incluir estos fenómenos es por medio de una constante cosmológica en las ecuaciones de campo. Los primeros argumentos, para la necesidad de otra clase de materia, provienen del estudio que relacionan la luminosidad con el corrimiento al rojo de supernovas muy distantes. Pero recientemente también parece haber indicios que provienen del estudio

de luminosidad de galaxias distantes [Me08, Ge08].

11.4.3. La química cósmica

Con el objeto de abordar otro aspecto de la química cósmica, aquí volvemos al proceso de nucleosíntesis en el Universo temprano.
En los primeros cuatro minutos del Universo se formaron varios núcleos atómicos primordiales que han marcado la química del mismo. Los cálculos detallados del proceso llamado nucleosíntesis del Big Bang, muestran que el remanente de la gran explosión es, como dijimos anteriormente, de aproximadamente 75% de hidrógeno, un 25% de helio y una muy pequeña cantidad de otros elementos livianos. Impresionantemente estas son las proporciones medidas en las observaciones.
La expansión fue lo suficientemente rápida como para que no hubiese tiempo para que se formasen núcleos muy pesados. Esto conduce a la pregunta:

¿cómo es que en la superficie de la Tierra encontramos núcleos pesados?

La explicación proviene del entendimiento de la vida de las estrellas. En las estrellas se produce una reacción nuclear que inicialmente transforma hidrógeno en helio. Cuando el hidrógeno se agota, comienza otra reacción nuclear en donde el helio se transforma en elementos más pesados. Cuando se agota el combustible nuclear, la estrella colapsa, y debido al colapso gana energía que se aprovecha para otras reacciones nucleares, en las cuales se producen elementos más pesados. Estos procesos ocurren en explosiones espectaculares llamadas novas y supernovas. Luego de una explosión de una supernova, se expele mucho material a los alrededores de la estrella. En general este material luego colapsa nuevamente debido a la atracción gravitatoria, formando un disco planetario que a su turno da formación a posibles planetas. En el centro de este sistema, en general se forma una nueva estrella, con los elementos que quedaron de la vida de la estrella anterior.
Todo esto nos conduce a pensar que nuestro sistema planetario proviene de la explosión de una estrella anterior. Es así que la muerte de una estrella anterior es lo necesario para que existamos ahora.

11.5. La singularidad inicial y el horizonte cosmológico

Históricamente, la primera teoría que describió las interacciones gravitacionales, fue formulada por Newton hace más de tres siglos atrás. Isaac Newton además presentó una teoría para los problemas mecánicos en general. El éxito contundente de la teoría newtoniana para describir, en particular, las observaciones del sistema planetario hizo pensar que se estaba al borde del conocimiento científico posible en estos temas. Sin embargo, luego se pudo formular una teoría para los fenómenos electromagnéticos, asociada a trabajos de Maxwell y Lorentz entre otros. Hacia fines del siglo diecinueve, se pudo notar que las ecuaciones de Maxwell que describen los fenómenos electromagnéticos, denotaban una estructura para el espaciotiempo distinta a las sugeridas por el marco teórico de la mecánica newtoniana.
Esta situación paradojal, incentivó la imaginación de los investigadores para hallar posi-

bles respuestas al tema. No fue hasta comienzos del siglo veinte que la situación se clarificó debido al trabajo de Albert Einstein. Por un lado Einstein aclaró la noción de espaciotiempo que se debía usar en el marco teórico del electromagnetismo; esto condujo a lo que hoy llamamos la *relatividad especial*. Pero además Einstein formuló las bases de una teoría relativista de la gravitación, que se conoce con el nombre de *relatividad general*. En esta teoría, la distribución de materia provoca alteraciones de las características geométricas del espaciotiempo; apareciendo así la llamada curvatura del mismo. A modo de ejemplo de una superficie de dos dimensiones con curvatura, podemos mencionar la superficie de una esfera. Al ser el espaciotiempo una variedad de cuatro dimensiones, es difícil hacer una representación concreta de dicha curvatura. Sin embargo es fácil conocer sus efectos. Por ejemplo, los rayos luminosos deben ser alterados por la presencia de un cuerpo masivo. Esto fue predicho por Einstein y en 1919, en un eclipse solar, se pudo observar que efectivamente la luz proveniente de estrellas, casi detrás del Sol, se curvaban un poco. Este fue uno de los experimentos que convencieron a la comunidad científica de la realidad de la teoría de la relatividad general.
Alrededor de la década de 1960, mediante trabajos de Roger Penrose y Stephen Hawking, se pudo probar que la teoría de la relatividad general, predecía la posible aparición de singularidades en el espaciotiempo. Cualitativamente podemos distinguir dos tipos de singularidades: aquellas que aparecen en los fenómenos de colapso, cuando se forma un agujero negro, y las singularidades cósmicas.
Pues bien, sucede que cuando tomamos en cuenta la distribución de materia observada y su movimiento, el uso de la relatividad general predice que en el pasado hay una singularidad del espaciotiempo.

¿Qué significa la existencia de una singularidad en el pasado?

Seguramente, no implica ningún peligro para nuestra vida cotidiana. Pero implica que el tiempo tuvo un comienzo. Esto es; uno por ejemplo puede pensar en que va al cine y comienza a ver una película a las 12:00 horas. Si bien la película comenzó a las 12, uno puede pensar y aún acordarse, de tiempos anteriores; o sea, uno siempre puede concebir tiempos anteriores a un suceso dado. El tema con la singularidad inicial del espaciotiempo, es que cuando uno usa la estructura matemática de la teoría, se puede probar como teorema que no se pueden extender curvas temporales hacia el pasado indefinidamente. Con esto queremos decir que existió un comienzo cósmico del tiempo. O sea que no tiene sentido preguntar, por ejemplo, en qué estado estaba la materia antes del comienzo del tiempo; ¡pues no había ni tiempo ni espacio donde pudiese estar ni existir esa materia!
Esto que conmociona a cualquier ser con raciocinio, es uno de los desafíos intelectuales a que nos ha sometido el avance del conocimiento de la física en el siglo veinte. Otro desafío es el provocado por el marco teórico de la física cuántica.
Si consideramos la existencia de la singularidad cósmica inicial con el hecho de que existe una velocidad máxima de las interacciones, llegamos a la conclusión de que en cada momento un observador sólo puede 'ver' una región limitada del Universo. Esto es debido a que cuando observamos un objeto que está digamos a n años luz, debido a que la información viene viajando con velocidad c, la información nos llega de una época anterior, más en concreto un tiempo $\Delta t = n$ años luz/$c = n$ años. Pero si existe un límite para nuestro pasado, debido a la existencia de la singularidad inicial, significa que Δt no puede

ser mayor que la edad del Universo y por ende la distancia máxima *n* en años luz que podemos observar coincide con el número que da la edad del Universo en años. O sea, si la edad del Universo es alrededor de 13.700.000.000 años, entonces la distancia máxima que podemos observar es 13.700.000.000 años luz. Es por esto que a pesar que nuestra concepción del Universo es que el espacio es ilimitado, la región observable es limitada; por lo que en ocasiones se habla del radio del Universo observable. Notar que este radio crece segundo a segundo, pues el Universo se sigue haciendo más viejo (por decirlo de alguna forma biológica); esto es, el tiempo sigue avanzando.
Decimos, entonces que existe un horizonte cósmico, al que se le da el nombre de *horizonte de partículas*. La existencia de este horizonte indica que, en todo momento, existen partículas (galaxias) que no podemos observar, pero que eventualmente en un tiempo futuro, dado que el horizonte crece con el transcurrir del tiempo, se lo podrá hacer.
Ahora retomemos el hecho de que la radiación cósmica de fondo sea tan suave en la esfera celeste. Luego de que se sustrae el efecto dipolar, debido a nuestro movimiento respecto de la radiación cósmica de fondo, lo que resta es una radiación de cuerpo negro con temperatura constante, salvo por pequeñas variaciones del orden de un cienmilésimo. Esas últimas variaciones tienen información de la estructura del Universo al momento en que la radiación electromagnética se desacopló de la materia. Consideremos la radiación cósmica de fondo que proviene de dos direcciones opuestas en la esfera celeste. Esta radiación ha venido viajando, por casi la edad del Universo, proveniente de dos puntos ubicados a casi dos veces el radio del Universo observable. Al momento del desacople de la radiación con la materia, estos dos puntos, origen del viaje de la radiación, tenían un horizonte de partículas determinado por la corta edad del Universo en esa época. Estos horizontes no tenían ninguna zona en común. La pregunta natural que surge es:

¿cómo es posible que la radiación cósmica de fondo proveniente de dos direcciones opuestas en la esfera celeste tiene las mismas características físicas, si provienen de dos zonas que no tenían conexión causal entre ellas?

Para entender un poco más esta pregunta, avancemos un poco más en lo que se entiende por conexión causal. El principio de causalidad es probablemente el principio más básico en toda ciencia fáctica. En su concepción más sencilla el principio de causalidad dice que todo evento sólo puede ser afectado por eventos en su pasado. Ejemplo: el vidrio de la ventana se rompió pues, previamente tiré la pelota en dirección hacia la ventana. El tema es que, como vivimos en un Universo con una singularidad inicial, nuestro pasado es finito. Cuando consideramos los eventos de emisión de radiación cósmica provenientes de dos puntos opuestos en la esfera celeste, estos se hallan tan separados que sus pasados, más precisamente, sus pasados causales, no tienen ningún punto de intersección en común. O sea que todo lo que afectó a un evento de emisión, no tenía conexión causal con lo que pudo afectar al otro evento de emisión.
Algunos cosmólogos han encontrado en esto un problema lo que ha provocado la aparición de modelos especulativos para intentar resolverlo.
Pero en realidad, hay otra manera de mirar esta situación en la que el problema desaparece. Sin entrar en detalles técnicos intentaremos dar una idea intuitiva de la resolución. Consideremos un sistema concreto. El sistema que tenemos en mente es el de un televisor en colores en el presente. Uno se puede preguntar:

¿cómo es que hoy podemos tener en frente nuestro un aparato como un televisor en colores, desde el punto de vista causal?

La respuesta a esta pregunta la podemos hacer tan larga como queramos. Por ejemplo, si en mi casa tengo un televisor es probablemente debido a que lo compré. Si lo compré es porque es útil; esto es si existe un sistema de emisión de imágenes que de algún modo tengo interés en ver. Además si lo compré es porque alguien lo fabricó. La fábrica supo qué hacer. El conocimiento empleado por la fábrica necesitó de la evolución tecnológica de la sociedad; lo que a su vez necesita de la evolución de toda la vida en la Tierra para que se llegue a la situación en que aparece la especie humana con algo de inteligencia para hacer cosas como televisores. Esto requiere de la formación de todo el sistema planetario que, como ya vimos, proviene de la explosión de una estrella anterior que estaba en esta zona de la galaxia. Pero una estrella como el Sol vive por algo así como 8.000 millones de años; que es probablemente lo que necesitó de vida la estrella anterior antes de explotar. Como el sistema solar tiene aproximadamente unos 4.500 millones de años de existencia, concluimos que para tener un sistema tan complejo como nuestro televisor en colores, se necesita un pasado de algo así como 12.500 millones de años. Estamos induciendo a pensar que la complejidad necesita explicación y que la misma requiere en general de un desarrollo temporal. Claro que podríamos tener la visión de imaginar un televisor en colores en el primer segundo del Universo; pero entonces no tendríamos cómo explicar su existencia, a no ser que se acuda a creencias dogmáticas, que no es lo que intentamos seguir en este escrito. En definitiva, es natural que muy en los comienzos del Universo la descripción de los sistemas físicos fuese cada vez más y más sencilla; lo que no contradice la existencia de altas temperaturas en aquellas épocas tempranas.
El hecho que, por un lado, la teoría relativista de la gravitación prediga la existencia de una singularidad inicial cósmica y, por el otro, de que los datos que tenemos del Universo temprano, nos indican una gran homogeneidad e isotropía inicial; son hechos que concuerdan y se dan fortaleza mutua de consistencia y realidad.

11.6. Evolución de la densidad de energía

Luego que la materia y la radiación electromagnética se desacoplan, cuando el Universo tenía unos 400.000 años de edad, la ulterior evolución de la densidad de energía de materia y la densidad de energía de la radiación tienen un comportamiento temporal disímil.
Si denotamos con $\mathcal{E}_m$ y $\mathcal{E}_r$ las densidades de energía de la materia y radiación respectivamente, se tiene que

$$\mathcal{E}_m(t)A(t)^3 = constante \quad (11.3) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_r(t)A(t)^4 = constante; \quad (11.4)$$

donde $A(t)$ es el llamado parámetro de expansión, que básicamente es proporcional a la distancia entre los objetos cosmológicos.
Por otro lado, de la ecuación 7.23, hemos visto que la densidad de energía de la radiación electromagnética termalizada es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura; por lo que para la temperatura de la radiación se tiene la relación

$$T(t)A(t) = constante. \quad (11.5)$$

Para simplificar, supongamos que al tiempo cósmico t_0 = 400.000 años, la densidad total de la energía $\mathcal{E}_T$ estaba constituida en 50% por densidad de energía de materia y otro 50% por densidad de energía de radiación. Además, también tomemos que la temperatura de la radiación a este tiempo era de $T(t_0)$ = 3.000 K. Luego tendremos que

$$T(t_0)\,A(t_0) = T(t)\,A(t) = constante; \qquad (11.6)$$

de donde se obtiene

$$3.000A(t_0) = 2{,}728A(t) \qquad (11.7)$$

Luego, deducimos que vale la relación

$$\mathcal{E}_T(t) = \mathcal{E}_m(t) + \mathcal{E}_r(t)$$

$$= \left(\frac{A(t_0)}{A(t)}\right)^3 \mathcal{E}_m(t_0) + \left(\frac{A(t_0)}{A(t)}\right)^4 \mathcal{E}_r(t_0)$$

$$= 0{,}5\,\mathcal{E}_T(t_0)\left[\left(\frac{A(t_0)}{A(t)}\right)^3 + \left(\frac{A(t_0)}{A(t)}\right)^4\right]$$

$$= 0{,}5\,\mathcal{E}_T(t_0)\left[7{,}519 \times 10^{-10} + 6{,}837 \times 10^{-13}\right]; \qquad (11.8)$$

lo que implica que la densidad de energía total desde el momento del desacople de materia y radiación ha disminuido en un factor 10^{-10} y además que al presente la contribución de la radiación cósmica de fondo a la densidad de energía total es del orden de 10^{-3}; por lo cual se dice que estamos en una era dominada por la evolución de la materia. La figura 11.5 muestra un esquema de la evolución cósmica de la densidad de energía de la radiación.

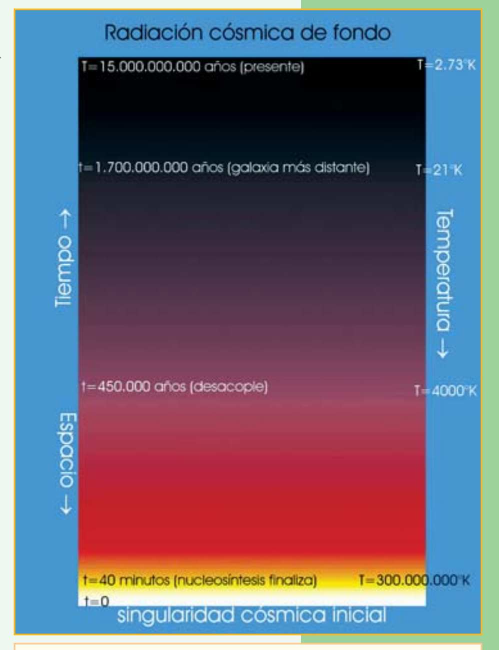


Figura 11.5.
Esquema de la evolución temporal de la densidad de energía de la radiación. El tiempo aumenta verticalmente, mientras que la temperatura disminuye; esto es debido a que a medida que evoluciona el Universo con tiempos cada vez mayores, la expansión provoca que la temperatura de la radiación vaya disminuyendo. Por otro lado, si obtenemos información, por medio de la radiación, de tiempos cada vez menores, implica que estamos observando espacios cada vez más lejos de nosotros. Los colores de fondo intentan dar una idea de la coloración de la radiación termalizada; pero es, solamente, indicativo. Así, mientras al presente el cielo nocturno es oscuro, cuando el Universo tenía aproximadamente 400.000 años de edad, el cielo correspondía a un cuerpo a una temperatura aproximada de 3.000 *K*, lo que lo hacía incandescente con una tonalidad rojiza.

11.7. Resumen de la historia del Universo

En la siguiente tabla se enumeran algunos eventos a lo largo de la historia del Universo desde la gran explosión.

Tiempo	*Temperatura [K]*	*Evento*	*Descripción*
10^{-43} s	10^{30}	*Era de Planck*	*A estas escalas no sólo no tenemos información sobre los estados de la materia, sino que no se conoce la estructura del espaciotiempo, que incluso podría ser discreta.*
menor a 0,01 s	*mayor a* 2×10^{12}	*interacciones fuertes dominan*	*Gran cantidad de mesones pi sometidos a la llamada interacción fuerte; se conoce poco del estado de la materia en estas condiciones; la física de épocas tempranas cosmológicas ha dado origen a muchas especulaciones, como por ejemplo el fenómeno de inflación.*
0,01 s	10^{11}	*balance térmico de nucleones*	*Electrones y positrones igual en número; protones y neutrones igual en número; la radiación domina; hay alrededor de* 10^9 *fotones por nucleón.*

Tiempo	Temperatura [K]	Evento	Descripción
0,12 s	3×10^{10}	neutrones decaen a protones	Hay un 38 % de neutrones y 62 % de protones entre los nucleones.
1,1 s	10^{10}	neutrinos se desacoplan	Se crea la radiación de neutrinos cósmica de fondo.
14 s	3×10^{9}	cesa creación de pares	Debajo de esta energía térmica la radiación de fotones deja de producir pares electrón positón; hay 17 % de neutrones y 83 % de protones.
3 m 2 s	10^{9}	nucleosíntesis de átomos livianos	Se forma tritio, helio 3 y helio.
3 m 46 s	9×10^{8}	nucleosíntesis está terminada	Los núcleos de deuterio son estables.
34 m 40 s	3×10^{8}	nucleosíntesis ha finalizado	La temperatura es demasiado alta para que los electones se liguen a los núcleos, por lo que no hay átomos estables todavía.
400.000 años	3.000	combinación (recombinación)	La llamada era de recombinación es cuando los núcleos de hidrógeno y de helio capturan electones y el Universo se torna transparente; se forma la radiación cósmica de fondo. Hasta esta época el Universo estaba dominado por radiación. A partir de esta época el Universo estará dominado por materia (o sea, la densidad de energía debida a materia es mayor que la radiación).
10^{9} años	20	formación galaxias	Alrededor de este tiempo la distribución de materia caracteriza la formación de estructura que conduce a las galaxias.
14×10^{9} años	2.7	vida inteligente	Seres vivos estudian cosmología.

Tabla 11.2. Tabla de algunos eventos cósmicos.

11.8. Recapitulación

La imagen que tenemos del Universo, por un lado es extremadamente sólida en términos de cuestiones gruesas; esto es, **tenemos certeza en una serie de temas, como por ejemplo:**

- **el Universo está en expansión; siguiendo en primer orden la ley de Hubble;**
- **a escalas muy grandes el Universo tiene propiedades de homogeneidad e isotropía;**
- **hay una radiación cósmica de fondo a una temperatura de 2,7 K;**
- **la gran explosión cósmica fue a altísima temperatura;**
- **el espaciotiempo tiene una singularidad inicial cósmica.**

Al mismo tiempo hay otras cuestiones que todavía no se entienden bien, entre las que podemos mencionar:

- **no tenemos suficiente información para describir confiablemente el primer centésimo de segundo del Universo;**
- **la formación de estructura, esto es, estrellas, galaxias y su distribución;**
- **la relación materia-antimateria;**
- **la naturaleza de la materia oscura.**

De todas formas la imagen que ya está corroborada constituye uno de los avances más significativos en la historia de la ciencia y ha redefinido profundamente el entendimiento que tenemos del cosmos.

Capítulo 12

Energía de los núcleos atómicos

12.1. Introducción

La denominación "átomo", empleada por Demócrito, para denotar los constituyentes de la materia, tiene el significado de indivisible. Sin embargo, experimentos del principio del siglo XX mostraron que el átomo era una partícula compuesta por una zona central, llamada núcleo, y una zona periférica formada por los electrones. El núcleo es muy pequeño comparado con las dimensiones típicas de un átomo. Para tener una idea del orden de magnitud basta comparar el radio de Bohr $a_0 = 5{,}2\times10^{-11}$m con la longitud de onda de Compton del protón $\lambda_p=1{,}3 \times 10^{-15}$m; de donde se deduce que el átomo de hidrógeno es aproximadamente 40.000 veces más grande que su núcleo.

12.2. Constituyentes del núcleo atómico

Los constituyentes básicos del núcleo atómico son los protones y neutrones. Se usa la denominación genérica de nucleones para denotar tanto a protones como neutrones. En la tabla 12.1 se muestran las propiedades fundamentales de electrones y nucleones: donde e = 1,6021 × 10^{-19} Coulomb denota la carga eléctrica elemental. El *espín* es el momento angular intrínseco de las partículas.

Partícula	*masa*	*carga*	*espín*
electrón	$9{,}1091 \times 10^{-31}$ *kg*	*-e*	1/2
protón	$1{,}6725 \times 10^{-27}$ *kg*	*e*	1/2
neutrón	$1{,}6748 \times 10^{-27}$ *kg*	0	1/2

Tabla 12.1. Constituyentes básicos del átomo.

Se puede caracterizar un núcleo por el número de protones Z y por el número total de nucleones A que lo forma. Al número Z se lo llama también *número atómico* mientras que a A se lo llama *número másico* del núcleo. Se deduce, entonces que el número de neutrones N está dado por $N = A - Z$. Se da la denominación de *isótopos* a los núcleos que tienen el mismo número atómico pero distinto número de neutrones. Para expresar las masas nucleares se suele usar la llamada unidad de masa atómica (uma) que se define como la doceava parte de la masa del átomo de carbono ^{12}C. Es así que resulta 1uma = 1,6604 × 10^{-27} kg.
Experimentalmente, se obtiene que el radio nuclear r es proporcional a $A^{1/3}$; más específicamente se tiene

$$r = r_0 A^{1/3}\,. \qquad (12.1)$$

Observando la distribución de masa se obtiene r_0 = 1,4 × 10^{-15}m. Por otro lado observando la distribución de carga se obtiene r_0 = 1,2 × 10^{-15}m; mientras que la

longitud de onda de Compton del electrón es $\lambda_p = 1{,}3 \times 10^{-15}$m.
Se deduce entonces que el volumen nuclear está dado aproximadamente por

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \; ; \qquad (12.2)$$

de donde se infiere que los nucleones se acomodan a distancias medias fijas independientemente del número másico. Además se deduce que la densidad nuclear es aproximadamente constante independiente de A; dado que la masa de un núcleo es aproximadamente $M = A$uma; luego la densidad nuclear está dada aproximadamente por

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{uma}{\frac{4\pi}{3} r_0^3} = 1{,}44 \times 10^{17} \frac{kg}{m^3} \qquad (12.3)$$

Ejercicio 12.1 Usando la relación E = mc^2 exprese las masas del electrón, del protón y del neutrón en unidades de MeV, mega electrón-volt.

Otras características importantes de un núcleo son su momento angular intrínseco o espín, su momento dipolar magnético y su momento cuadrupolar eléctrico.

12.3. Interacciones nucleares

12.3.1. Interacción fuerte

Como los protones tienen carga eléctrica, la interacción nuclear protón-protón o protón-neutrón debe ser más fuerte que la interacción de repulsión electromagnética entre protones. Debido a esto se denomina a las interacciones nucleares responsables de la estabilidad de los núcleos, como interacción fuerte.
De la misma manera que se atribuye al fotón la interacción electromagnética entre partículas cargadas, usaremos la denominación genérica de pión para denotar la partícula responsable de la *interacción fuerte*.

12.3.2. Interacción débil

No todos los núcleos son estables. Se observa distintos tipos de decaimientos. Para explicar los decaimientos tipo β es necesario recurrir a la llamada *interacción débil*.

12.4. Nota histórica: el problema de la conservación de la energía en el decaimiento β

Debido a que los estados electrónicos de los átomos y los estados nucleares están cuantizados la mayoría de los procesos incluyen la emisión de partículas con energías bien definidas, lo que ayuda a caracterizar las propiedades de los átomos o de los núcleos. Pero en 1927 se observó la emisión de rayos de elementos, con un espectro continuo de energías. Con el correr del tiempo se reconoció que estos fenómenos consistían en la emisión de electrones de núcleos atómicos. En 1930 Wolfgang Pauli (1900-1958) sugirió que en el decaimiento se debía producir una tercera partícula que no era detectada. En 1933 Enrico Fermi (1901-1954) describió el proceso de decaimiento β introduciendo una nueva partícula que llamó

neutrino. Los neutrinos debían tener carga eléctrica cero y muy poca masa o masa cero. En relación con esto se debe notar que el neutrón no es una partícula estable. En estado libre decae. Este proceso se lo conoce más precisamente como el decaimiento β; en el cual un neutrón decae en un protón un electrón y un antineutrino

$$n \leftarrow p + e^- + \bar{\nu} \qquad (12.4)$$

La vida media de un neutrón libre es aproximadamente 15 minutos.

12.5. Energía nuclear

La energía necesaria para separar un nucleón del núcleo se la llama energía de ligadura nuclear.

Consideremos el caso sencillo del deuterón que está formado por un protón y un neutrón. La masa del deuterón es m_d = 2,014102 uma; mientras que las masas de los nucleones son m_p = 1,007825 uma para el caso del protón y m_n = 1,008665 uma para el caso del neutrón. Denotando con E_{pn} la energía del sistema protón neutrón no ligados y con E_d la energía del deuterón, definimos la energía de ligadura E_l por $E_l = E_{pn} - E_d$ de donde se obtiene para este caso que

$$E_l = (m_p + m_n - m_d)\, c^2 = 931{,}48\ MeV\ \frac{(m_p + m_n - m_d)}{uma} = 2{,}224\ MeV \qquad (12.5)$$

donde hemos usado el equivalente en energía de una masa de una uma en unidades de mega electrón-volt [MeV].

Como la energía del estado no ligado es mayor que la del estado ligado, vemos que en este caso se liberará energía cuando un protón y un neutrón se combinan para formar un deuterón.

Comparemos este valor de energía de ligadura con la energía electrostática entre dos protones cuando están a una distancia $r_2 = 2r_o \approx 2{,}6 \times 10^{-15}$m; que está dada por

$$E_{pp} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 5{,}5 \times 10^5\ eV. \qquad (12.6)$$

Recordando que la energía de ligadura del átomo de hidrógeno es sólo 13,6 eV.

Podemos además calcular la energía gravitatoria asociada a un sistema compuesto por masas m_p y m_n puestas a una distancia r_2 lo que nos da

$$E_G = \frac{G m_p m_n}{r_2} = 4{,}5 \times 10^{-31}\ eV \qquad (12.7)$$

Vemos, entonces, que la relación entre energía de ligadura nuclear y energía electrostática es aproximadamente

$$\frac{E_l}{E_{pp}} = \frac{2{,}224 \times 10^6}{5{,}5 \times 10^5} \approx 4 \qquad (12.8)$$

mientras que la relación entre energía de ligadura nuclear y energía potencial gravitatoria es

$$\frac{E_l}{E_G} = \frac{2{,}224 \times 10^6}{4{,}5 \times 10^{-31}} \approx 5 \times 10^{36} \qquad (12.9)$$

De aquí se observa que la interacción que determina las interacciones nucleares se la llama fuerte.

Hay otra característica importante que diferencia la interacción fuerte de las otras dos recién mencionadas y es que mientras la interacción fuerte es de muy poco alcance (las partículas involucradas deben estar a menos de 10^{-14} m), tanto la interacción electromagnética como la gravitatoria tienen alcance infinito (no importa a qué distancia esté una partícula de la otra, la trayectoria de una partícula es siempre afectada por la presencia de la otra).

Como se observa en la figura 12.1 de pesos atómicos versus número atómico, los núcleos estables alcanzan una masa de hasta alrededor de 200 uma.

Esto implica que se deberían tener en cuenta efectos de volumen para núcleos con tantas partículas.

Una fórmula que predice con bastante precisión la energía de ligadura de los nucleones en función del número másico A y del número atómico Z es la siguiente

$$E_l = \epsilon_1 \mathrm{A} - \epsilon_2 \mathrm{A}^{2/3} - \epsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \epsilon_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} \; ; \qquad (12.10)$$

donde el primer término del lado derecho toma en cuenta que la energía de ligadura debería crecer linealmente con el número másico; el segundo término que a la energía de interacción se le debe restar los términos de superficie que van como r^2 o equivalentemente como $A^{2/3}$; el tercer término toma en cuenta la repulsión coulombiana que en primera aproximación se comporta como $Z^2/r \approx Z^2/A^{1/3}$; el cuarto término toma en cuenta una corrección debido a la energía cinética de los nucleones. El valor de las constantes está dado por

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 15{,}760\ MeV, & \epsilon_2 &= 17{,}810\ MeV, \\ \epsilon_3 &= \ \ 0{,}711\ MeV, & \epsilon_4 &= 23{,}702\ MeV. \end{aligned} \qquad (12.11)$$

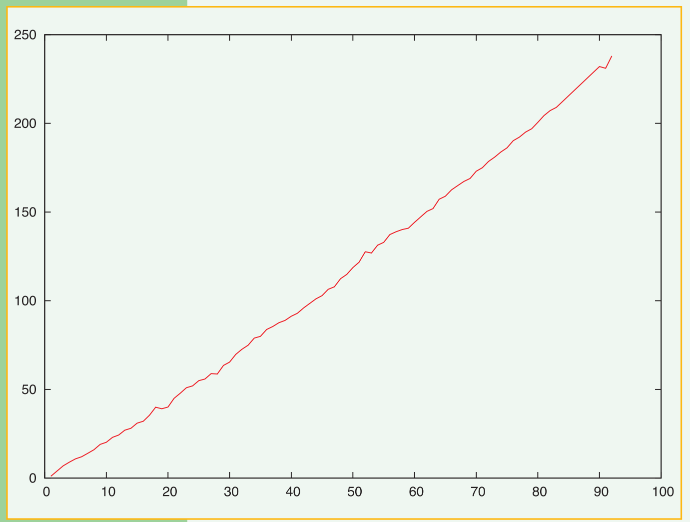


Figura 12.1.
Gráfico de los pesos atómicos en unidades de [uma] como función del número atómico.

Usando esta fórmula para la energía de ligadura, se puede probar que el valor de Z, para A fijo, que maximiza la estabilidad del núcleo está dado por

$$Z = \frac{A}{2+0{,}01499\ \mathrm{A}^{2/3}} \; . \qquad (12.12)$$

Si se reemplaza esta expresión de Z en la ecuación para la energía de ligadura, se puede calcular cuál es el valor de A que maximiza la energía de ligadura por nucleón. En la figura 12.2 se observa que la energía por nucleón $e\,(A) = \frac{E_l(A)}{A}$ tiene un máximo alrededor de A = 60; lo que implica un valor del número atómico alrededor de Z = 26, que corresponde al hierro (Fe).

La curva que se grafica en la figura 12.2 representa bastante bien los datos experi-

mentales. Se deduce entonces que cuando dos núcleos livianos, con $Z << 26$, se unen para formar un núcleo más pesado, se libera energía; mientras que si un núcleo pesado, con $Z >> 26$ se desintegra para formar dos núcleos más liviano también se libera energía. Al primer proceso se lo conoce como *fusión* mientras que al segundo se lo llama proceso de *fisión*.

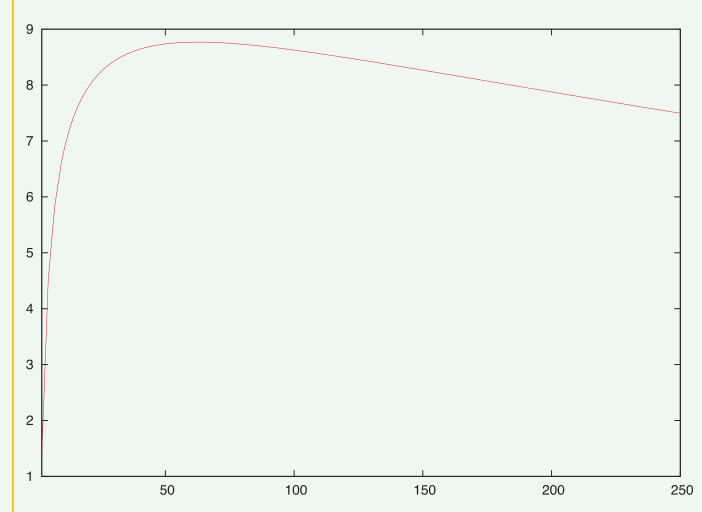


Figura 12.2.
Energía por nucleón teórica, en MeV, como función del número atómico.

Además de los núcleos estables se encuentran núcleos inestables o radioactivos. Estos núcleos desprenden partículas en los procesos radioactivos y tienden a conseguir una configuración estable de esta forma. Históricamente se les dio el nombre de partículas α y β a aquellas liberadas en los procesos radioactivos.

Las partículas α son núcleos de helio compuestas por dos neutrones y dos protones. Las partículas β son electrones. Existen núcleos que liberan antielectrones en lugar de electrones. Para distinguir estos dos tipos de desintegración se denota con β^- el proceso de desintegración que libera un electrón y con β^+el proceso que libera un antielectrón.

Los procesos de desintegración radioactivos siguen una ley de evolución temporal exponencial; de tal forma que si se comienza con una muestra que tiene N_0 núcleos radioactivos, luego de un tiempo t se tendrán

$$N(t) = N_0 \, exp^{-\lambda t} \qquad (12.13)$$

núcleos; donde la constante es una característica del núcleo radioactivo y se la denomina *constante de desintegración*. Se define como *vida media* del núcleo a la constante T dada por

$$T = \frac{ln\,2}{\lambda}; \qquad (12.14)$$

dado que el significado de T es que $N(T) = \frac{1}{2}N_0$. A modo de ejemplo mencionemos que el isótopo uranio 238, que es el más común y se denota por $^{238}_{92}U$, tiene una vida media de 4×10^9años; mientras que el isótopo $^{235}_{92}U$, tiene una vida media de 7×10^8 años.

Estamos usando la notación usual de isótopos $^{A}_{Z}X$ donde X es el símbolo del elemento y donde A y Z son el número másico y atómico respectivamente.

12.6. Reactores nucleares

Actualmente, los reactores nucleares hacen uso de la fusión nuclear para producir energía. La forma usual de conseguir la fusión es inducirla por captura de neutrones sobre el isótopo $^{235}_{92}U$ del uranio. En el proceso de desintegración se emiten en pro-

medio más de dos neutrones que a su vez inducen el decaimiento de otros núcleos. Esto permite que se pueda producir la reacción en cadena.

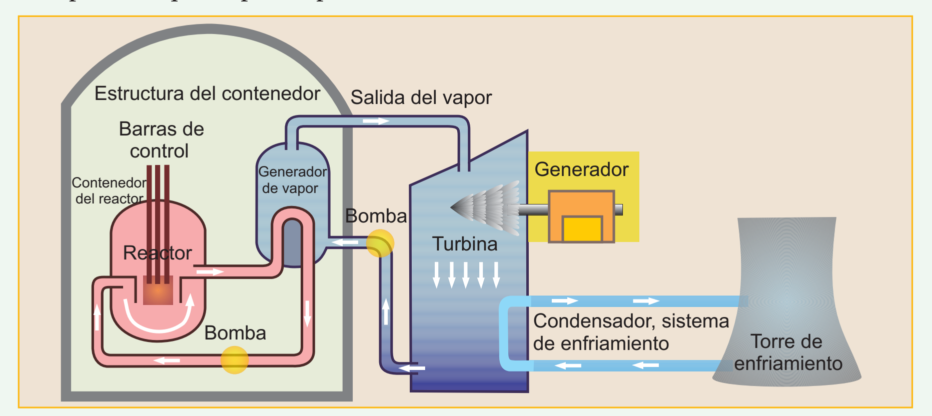
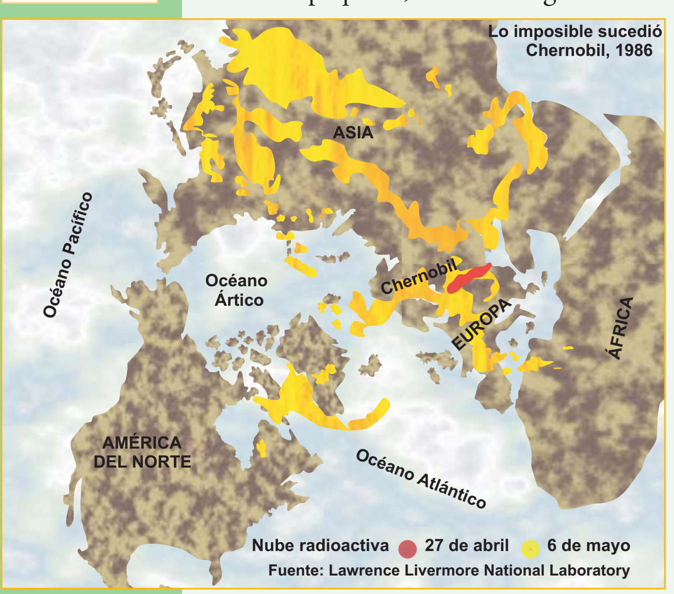


Figura 12.3. Esquema de funcionamiento de un reactor nuclear.

El objetivo de un reactor nuclear es producir esta reacción en cadena, controladamente, y aprovechar la energía producida. La energía liberada en la fisión de un núcleo de $^{235}_{92}U$ es de, aproximadamente, 200 *MeV*; que es mucho mayor que la energía liberada en reacciones químicas que, típicamente, son del orden del *eV*. Para controlar la reacción nuclear se usan substancias que absorben neutrones que se denominan moderadores. Se usan para este fin al agua, al agua pesada y al grafito. Un diseño típico de reactor es el que muestra la figura 12.3.

Como es sabido, la generación de energía nuclear, además de producir desechos radioactivos muy contaminantes, tiene altos riesgos. Dos de los incidentes más peligrosos que han ocurrido son el de "Three Mile Island", acaecido en marzo de 1979 y el de Chernobil, que comenzó el 26 de abril de 1986. En los dos casos se llegó a una situación tal que se derritió el núcleo que contenía el combustible nuclear. En el caso de "Three Mile Island" la pérdida de substancias radioactivas fue relativamente pequeña; sin embargo en el caso de Chernobil las fugas de sustancias radioactivas fue masiva y afectó una buena porción del planeta. En la figura 12.4 se observa los alcances de la nube radioactiva. En la Argentina hay dos centrales nucleares en operación y una en construcción.

Figura 12.4. Nube global radioactiva producida en el desastre de Chernobil.



Existen además estudios sobre posibles reactores nucleares que hagan uso del proceso de fusión. Estos están, fundamentalmente, asociados al diseño del tokamak que es un reactor en forma de toro donde se espera confinar la reacción nuclear por medio de fuertes campos magnéticos. El proceso de fusión del hidrógeno es la fuente principal de energía del Sol. Este proceso produce helio a expensas del hidrógeno. Cuando éste se acaba, comienza otra reacción que consume helio produciendo elementos más pesados en el proceso de fusión.

Las bombas atómicas se han construido tanto usando la fisión como la fusión. Las primeras fueron construidas con elementos pesados y hacían uso de la fisión. Las más modernas y poderosas usan como combustible al hidrógeno y por lo tanto usan el proceso de fusión. Las centrales nucleares producen isótopos radioactivos que son usados en diversas aplicaciones técnicas incluyendo la medicina.

12.7. La vida de las estrellas

12.7.1. El Sol

El cuerpo más masivo de nuestro sistema planetario es el Sol que es la estrella más cercana a nosotros. Las características del Sol más importantes para nuestra vida son: que tiene una masa de $1,99 \times 10^{30}$ kg, un radio de aproximadamente $6,96 \times 10^{8}$ m, está a una distancia de $1,5 \times 10^{11}$ m y radía como un cuerpo negro a una temperatura de 5.780 K. La foto de la figura 12.5 fue tomada por el satélite SOHO en la banda de ultravioleta.
La corona solar está a una temperatura de aproximadamente a 1.000.000 K.

Figura 12.5.
Foto del Sol tomada por el satélite SOHO con el instrumento Extreme Ultraviolet Imaging Telescope (EIT) a 171 Angströms [Å] (recordar que 1 Å = 10^{-10} m).

12.7.2. Grupos básicos de estrellas

Las estrellas dominan el paisaje nocturno cuando no hay nubes. La fuente de energía para que las estrellas puedan brillar por tanto tiempo son reacciones nucleares que se producen en su interior.
Algunas estrellas aparecen en conjuntos llamados conglomerados. Existen dos tipos generales de conglomerados globulares y galácticos (o abiertos). Los globulares tienen un aspecto compacto con una distribución más o menos esférica; admitiendo, típicamente, unas 100.000 estrellas. Los galácticos no tienen tantas estrellas y tienen un aspecto geométrico más irregular.
En general ha resultado útil la división de la estrellas en dos grandes grupos conocidos como población I y población II. Las características fundamentales de estas poblaciones son que las estrellas integrantes de la población I están fundamentalmente distribuidas en el disco de la galaxia, son relativamente jóvenes y tienen una abundancia rica en elementos pesados; mientras que las integrantes de la población II están fundamentalmente distribuidas en el halo de la galaxia, son relativamente viejas y tienen poca abundancia de elementos pesados.

12.7.3. Luminosidad, magnitudes aparentes y colores de las estrellas

La intensidad de la luz que recibimos de una estrella, puede ser medida con el ins-

trumento de observación que se esté usando. Antiguamente, se usaba el ojo, y se definió una escala para medir la luminosidad que iba del 1 al 6; usándose el valor 1 para la estrella más luminosa. Al valor de la escala se lo llama magnitud. La sensitividad del ojo es logarítmica; por lo que la escala de magnitudes también lo es.
Si denotamos con *I*(*X*) la intensidad de la estrella *X* recibida por un instrumento que tiene una sensitividad a los colores similar a la del ojo humano, la relación entre dos magnitudes está definida por la ecuación

$$m(\alpha) - m(\beta) = -2{,}5 \log \frac{I(\alpha)}{I(\beta)}; \qquad (12.15)$$

donde el signo menos toma en cuenta que las magnitudes aumentan cuando la intensidad de las estrellas disminuye y estamos usando la denominación 'log' para denotar los logaritmos en base 10 (reservando la notación usual de 'ln' para los logaritmos naturales en base e). Supongamos que la estrella β se la toma como de magnitud 0; luego se puede usar la ecuación anterior para determinar la magnitud de cualquier otra estrella.
Se debe enfatizar que de esta forma se está definiendo un sistema de magnitudes aparentes, pues se toma en cuenta sólo la información de la radiación recibida en la Tierra. Para tomar en cuenta la magnitud absoluta de una estrella es necesaria además tomar en cuenta la distancia a la misma.
Con esta definición, existen estrellas que resultaron con magnitudes negativas; como la estrella Sirio que tiene magnitud m = -1,6.
Para tener una medida del color de una estrella se debe comparar la intensidad luminosa en distintas bandas. El sistema más usado de magnitudes aparentes es el llamado sistema UBV; que mide en la banda ultravioleta U a alrededor de 3.400 Å, en la banda azul B a aproximadamente 4.300 Å y en la banda visual V a alrededor de 5.500 Å. Cada banda es de aproximadamente 1.000 Å de ancho.
Se usa la notación B-V para significar la resta $m_B - m_V$; esto es la resta entre la magnitud aparente en la banda B menos la magnitud aparente en la banda V. Análogamente se define U-B. de esta manera se le puede dar una noción precisa al color de las estrellas. Por ejemplo, si la estrella que estamos observando tiene el valor B-V mayor que el valor que tiene la estrella α de referencia entonces diremos que la estrella β es más roja que la α; similarmente si B-V es menor diremos que α es más azul que β.

12.7.4. Magnitudes absolutas

En la noción de magnitud absoluta, es necesario hacer uso de la distancia al objeto bajo observación.
En estudios astronómicos se usan diversas unidades para medir distancias. A la distancia media al Sol se la denomina *unidad astronómica* y se la denota ua; siendo su valor de 1ua= $1{,}49 \times 10^{11}$m.
Otra unidad de medida, que mencionamos, anteriormente, es el año luz. Pero los astrónomos usan frecuentemente el *parsec*. El parsec se define en término del efecto llamado paralaje. **Sin entrar en detalles sólo nos basta saber que un parsec equivale a $3{,}09 \times 10^{16}$m o a 3,26 años luz.**
Para tener una medida de la luminosidad intrínseca de una estrella se tiene que recurrir a una escala distinta que las magnitudes aparentes; dado que una estrella podría ser intrínsecamente muy brillante pero aparecer a simple vista como muy tenue sólo

porque está muy lejos. La luminosidad aparente disminuye con la distancia d como $1/d^2$; dado que la energía que atraviesa por unidad de tiempo a las esferas con centro en la estrella es la misma en una situación estacionaria. Vemos entonces que si $I(d)$ es la intensidad de la luz recibida de una estrella cuando está a una distancia d; si estuviese a una distancia de 10 parsec tendría la intensidad

$$I(10\,parsec) = I(d)\left(\frac{d}{10\,parsec}\right)^2. \qquad (12.16)$$

Se define como magnitud absoluta M a la magnitud aparente que tendría la estrella si estuviese a 10 parsec de distancia. Entonces se tiene

$$M = m(10\,parsec) = m(d) - 2{,}5\,log\,\frac{I(10\,parsec)}{I(d)} = m(d) - 5\,log\,\frac{d}{10\,parsec}; \qquad (12.17)$$

ésta es la ecuación que se debe usar para calcular las magnitudes absolutas.
Existen magnitudes absolutas definidas para las distintas bandas; más adelante haremos uso de M_V.

12.7.5. Diagrama de Hertzsprung-Russell

Estamos en condiciones de entender una de las observaciones más importantes que atañe a las estrellas; es el llamado diagrama de Hertzsprung-Russell. El mismo es un gráfico donde cada punto refiere a una estrella a la cual se le ha medido su magnitud absoluta M_V y la magnitud B-V. Para las estrellas cercanas al Sol se obtiene el gráfico mostrado en la figura 12.6. Remarquemos entonces que el diagrama de Hertzsprung-Russell se puede entender como un diagrama de luminosidad vs. color de las estrellas, o equivalentemente de luminosidad vs. temperatura de las estrellas; dado que por medio del espectro de radiación de Planck podemos asociar color con temperatura.
Aproximadamente el 90% de las estrellas cercanas están en la secuencia principal. Los nombres gigantes y enanas están asociados a los respectivos tamaños de estos conjuntos de estrellas.
Dado que las estrellas constantemente están consumiendo su combustible nuclear, evolucionan en el tiempo; por lo que uno se pregunta si esa evolución se reflejará como un movimiento con el correr del tiempo de una estrella en este diagrama. Por ejemplo, uno se podría preguntar si a lo largo de la vida de una estrella se puede saltar de un grupo a otro de este diagrama. En lo que sigue estudiaremos este tipo de preguntas.

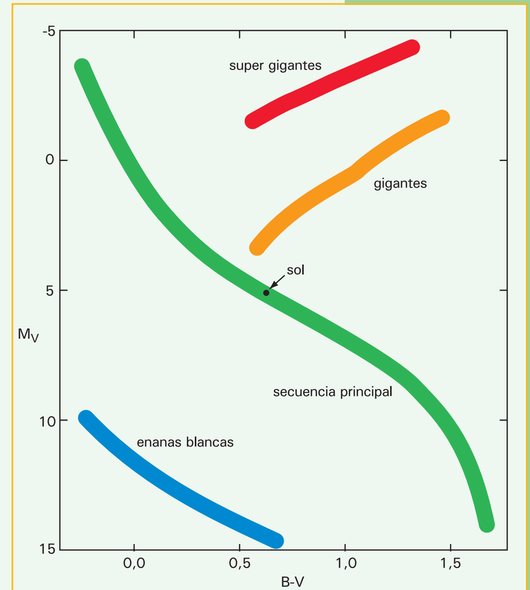


Figura 12.6. Diagrama de Hertzsprung-Russell que muestra la relación entre la magnitud absoluta en la banda V versus el índice de color B-V.

12.7.6. Procesos nucleares en las estrellas

La producción de energía de las estrellas es por medio de reacciones nucleares. Cuando se estudia la energía de ligadura por nucleón como función del número másico A, se nota que existe un máximo entre valores de A que van de 50 a 60, apro-

ximadamente. Esto indica que es posible obtener energía de núcleos livianos a expensas de procesos de fusión y de núcleos pesados a expensas de fisión.
Entre los protones existe la interacción electromagnética de largo alcance que es repulsiva; mientras que las interacciones fuertes entre nucleones es de corto alcance. Luego para que las reacciones nucleares puedan tener lugar, es preciso que los componentes tengan una energía cinética inicial más o menos grande para poder sobrepasar la barrera de repulsión eléctrica entre protones. En un gas ideal no relativista la energía cinética es proporcional a $k_B T$ por lo que se necesita que la temperatura sea lo suficientemente alta para que las reacciones nucleares puedan ocurrir. Este tipo de reacciones se conoce con el nombre de *termonucleares*.
Si se tiene un gas perfecto autogravitante; pero la temperatura no es lo suficientemente alta para que comiencen las reacciones nucleares, entonces carecerá de una fuente de energía importante y el gas se contraerá por su propio peso. Pero al contraerse, las partículas chocan más frecuentemente entre ellas y hay una transferencia de energía gravitatoria a energía interna del gas de tal forma que la temperatura aumenta; pudiéndose lograr ulteriormente una reacción termonuclear. La masa de la estrella tiene que ser lo suficientemente grande para que haya suficiente energía gravitatoria disponible; estimaciones de esta masa mínima M_{min} dan que $M_{\text{min}} \approx 0{,}2 M_{\odot}$; donde usamos $M_{\odot}$ para denotar la masa del Sol.
Para núcleos con número atómico creciente se tiene que crece también la repulsión eléctrica con otro protón. Luego se necesitan temperaturas más altas para lograr la fusión de núcleos con número atómico mayor. Luego para una dada estrella se espera que inicialmente se consuman los elementos más livianos en las reacciones nucleares; convirtiéndose en núcleos más pesados; los que con ulterior aumento de la temperatura también se consumirán en elementos que finalmente estarán alrededor del número atómico del hierro. Cuando las estrellas llegan a esta situación no se espera que haya ulteriores reacciones nucleares de fusión. Lo que sucede después depende de la masa y composición química de las estrellas.

12.7.7. Reacciones del quemado del hidrógeno

La transmutación de hidrógeno en helio se lleva a cabo por medio de dos mecanismos principales; las llamadas cadenas PP y el ciclo CNO. Las reacciones toman lugar a una temperatura de aproximadamente 10^7 K.
La cadena PP se divide en tres ramas principales, llamadas PP I, PP II y PP III. La cadena PP describe reacciones que partiendo de protones solamente llega a formar núcleos de helio 4.
El ciclo CNO usa al carbono, al nitrógeno y al oxígeno como catalizadores de la reacción que transforma al hidrógeno (protones) en helio.

12.7.8. Reacciones del quemado del helio

Las primeras reacciones en producirse en la vida de una estrella son las que consumen hidrógeno. Cuando se acaba el hidrógeno estas reacciones nucleares no pueden seguir; esta falta de producción de energía tiene el efecto que la estrella se contrae y, de esta manera, aumenta la temperatura en el centro de la misma, permitiendo ahora las reacciones termonucleares que involucran núcleos más pesados.

Las reacciones que involucran el quemado del helio toman lugar a una temperatura de aproximadamente 10^8 K.

12.7.9. Otras reacciones termonucleares

Cuando el helio se consume, la estrella, nuevamente, se contrae, incrementándose nuevamente la temperatura y dando lugar a reacciones de fusión nuclear que producen núcleos más pesados a expensas de núcleos más livianos, como el carbono. La combustión del carbono se realiza a una temperatura de aproximadamente 5×10^8 K; mientras que la combustión del oxígeno y del silicio ocurre a 10^9 K y 2×10^9 K respectivamente.

12.7.10. Estados finales en la evolución estelar

A medida que se consume el hidrógeno, el contenido de helio en la parte central de la estrella aumenta. A medida que el helio se acumula en el núcleo de la estrella su atmósfera se torna convectiva y se expande considerablemente. Bajo estas condiciones la estrella se encuentra en la rama de las estrellas gigantes, o gigantes rojas, del diagrama de Hertzsprung-Russell.
Para estrellas con masa mayor que 15 masas solares la temperatura en el interior es lo suficientemente elevada como para que el quemado del helio comience cuando la estrella está cerca de la secuencia principal.

Masa [$M_\odot$]	*Descripción*	*Estado final*
$M < 0{,}5$	*La zona central no alcanza la temperatura suficiente para producir la reacción de fisión del helio.*	
$0{,}5 < M < 2{,}25$	*La zona central de la gigante se contrae lo suficiente para que los elementos formen un gas degenerado; se produce el flash del helio lo que remueve la degeneración y provee posteriormente de otra situación metaestable para la combustión del helio.*	*Las capas externas son expelidas y el remanente forma una enana blanca.*
$2{,}25 < M < 5$	*La zona central de helio no llega a alcanzar la situación del gas degenerado de electrones; por lo que el quemado de helio comienza lentamente; sin embargo luego del quemado de helio ocurre el flash del carbono.*	*Las capas externas son expelidas y el remanente forma una enana blanca.*
$10 < M < 15$	*Luego que la zona central se tranforma en hierro, por fotodesintegración se producen núcleos de helio y neutrones; también se produce la reacción* $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$, *esto produce una pérdida de presión que provoca un colapso hasta que se alcanzan densidades nucleares.*	*Se produce una explosión supernova de tipo II y queda como remanente una estrella de neutrones.*
$15 < M$	*Luego que la zona central se tranforma en hierro, por fotodesintegración se producen núcleos de helio y neutrones; también se produce la reacción* $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$, *esto produce una pérdida de presión que provoca un colapso hasta que se alcanzan densidades nucleares.*	*No se produce una explosión por lo que el colapso prosigue hasta formar un agujero negro.*

Cuadro 12.2. Estadios finales de las estrellas. En este esquema no hemos introducido datos importantes como la composición química de las estrellas; la cual afecta velocidades de reacción entre otras cosas.

En el cuadro 12.2 se muestra un esquema como función de la masa inicial de los posibles estados finales de las estrellas.
En este esquema no hemos introducido datos importantes como la composición química de las estrellas; la cual afecta velocidades de reacción entre otras cosas.
Vemos, esencialmente, entonces que estrellas con poca masa terminan su vida como

enanas blancas, estrellas de masas medianas en estrellas de neutrones y estrellas de mucha masa en agujeros negros.

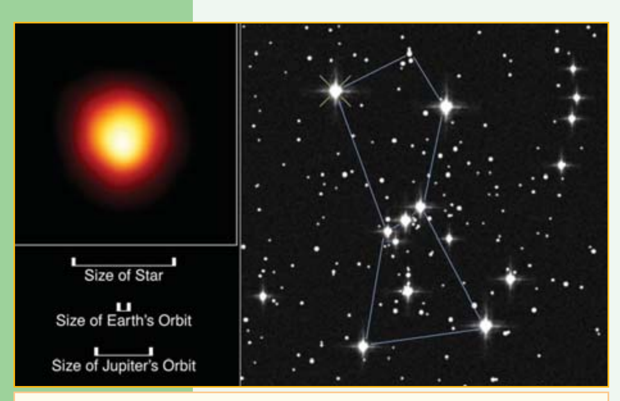


Figura 12.7.
En la izquierda, foto de la estrella gigante roja, Betelgeuse tomada por el telescopio espacial Hubble. Esta estrella se encuentra en la constelación de Orión, como muestra la foto de la derecha. Debajo de la foto de la estrella se encuentra un diagrama comparativo donde se muestran en proporción las dimensiones de la órbita de la Tierra y las dimensiones de la órbita de Júpiter.



Figura 12.8.
Foto de la nebulosa del Cangrejo tomada por el telescopio espacial Hubble. La nebulosa es el remanente de una explosión de supernova que ocurrió aproximadamente hace 900 años. El tamaño de la nebulosa es de aproximadamente 10 años luz y está a una distancia de aproximadamente 7.000 años luz. En su interior se encuentra un pulsar. Se denomina así a una estrella de neutrones pulsante.

12.7.11. Datos característicos de los diversos tipos de estrellas

Estrellas gigantes

Cuando comienza el quemado de elementos más pesados, las capas exteriores a la zona central se expanden y las estrellas aumentan considerablemente de tamaño. De esta forma alcanzan el estado conocido como estrellas gigantes.
Los radios de estas estrellas son aproximadamente de las dimensiones del radio medio de la órbita de Júpiter.

Enanas blancas

Son estrellas a las cuales se les ha acabado el combustible nuclear y mantienen su equilibrio hidrostático por medio de la presión de Fermi del gas degenerado de electrones. Cálculos sobre la masa máxima para que este equilibrio sea posible, dan el llamado límite de Chandrasekhar que consiste en la cota

$$M_{elec} < 1{,}4\, M_{\odot}\,. \qquad (12.18)$$

El radio característico de una enana blanca es 6.000 km.

Novas y supernovas

Las supernovas son explosiones de estrellas de masa mediana luego del proceso de combustión termonuclear. La luminosidad de estas estrellas puede ser mayor que la de la galaxia que las contiene; pero su pico de luminosidad dura poco tiempo, del orden de días. En 1987 ocurrió una supernova en la Nube Grande de Magallanes; la que viene siendo observada desde entonces.
Las novas son explosiones estelares de menor energía que se piensa son producidas generalmente en sistema binarios, donde una de las estrellas provee de transferencia de materia a la otra. Una inestabilidad en esta última provocaría la explosión.

Estrella de neutrones

La explosión de supernovas provoca un apretamiento de los protones y electrones de tal forma que se transforman en neutrones y neutrinos. Al no quedar electrones que puedan formar un gas degenerado, el sistema aumenta su densidad hasta que se

forma un gas degenerado de neutrones. Lo que da la posibilidad de lograr equilibrio hidrostático y de esta forma se tiene una estrella de neutrones.

Cálculos sobre la masa máxima que pueda tener una estrella de neutrones dan como resultado la cota

$$M_{neu} \approx 4\, M_{elec} < 5{,}6\, M_{\odot} \qquad (12.19)$$

sin embargo hay un poco de discusión sobre este límite y algunos autores piensan que en realidad el límite es $M_{neu} < 2M_{\odot}$.
Se tiene observación de varias estrellas de neutrones con masas alrededor de 1,4 *M*; como por ejemplo, el caso del famoso pulsar binario 1913+16.
El radio típico para estas estrellas es alrededor de 12 km.

Agujeros negros
Cuando en la fase final de la vida de una estrella se tiene una zona central con masa superior a los límites permitidos para estrellas de neutrones, el colapso final es inevitable y finalmente se forma un agujero negro.
Se le llama agujero negro a los cuerpos que son tan compactos que su velocidad de escape, calculado newtonianamente, da mayor que la velocidad de la luz. Como la velocidad de la luz es la velocidad máxima de cualquier interacción, se deduce que, en realidad, nada puede escapar de los agujeros negros (ni siquiera la luz).

12.7.12. Descripción del diagrama de Hertzsprung-Russell

Estamos en condiciones ahora de entender mucho más al diagrama de las observaciones que aparecen en el diagrama de Hertzsprung-Russell.
El grupo de la llamada secuencia principal corresponde al grupo de estrellas que están en la fase del quemado de combustible a través de reacciones termonucleares. El tiempo que emplean en dicho estadio depende de la masa inicial de la estrella.
En la tabla 12.3 figuran estimaciones del tiempo que emplean las estrellas en la secuencia principal como función de su masa

Masa / $M_{\odot}$	15	9	5	3	2,25	1,5	1,25	1
Tiempo en miles de millones de años	0,01	0,022	0,068	0,23	0,5	1,7	3	8,2

Tabla 12.3. Tiempo de vida de las estrellas como función de su masa inicial.

Se nota una fuerte dependencia del tiempo de vida en la secuencia principal con la masa. En particular, resulta interesante comparar estos valores con la edad atribuida a la corteza terrestre, que es de $4{,}5 \times 10^9$años. De aquí deducimos al menos dos aspectos; uno es que las estrellas observadas que tengan más que 1,25 masas solares se formaron luego de la formación de la Tierra; otro es que si en la Tierra se necesitaron $4{,}5 \times 10^9$años para que se desarrollara vida inteligente (con capacidad de entender el cosmos entre otras), entonces es probable que no haya vida inteligente en planetas alrededor de estrellas con masas mayores a 1,25 masas solares.
Esto también nos conduce a una serie de preguntas. De las observaciones de estrellas con masas mayores a la masa del Sol y de la tabla anterior se deduce que se están produciendo estrellas en la galaxia. Esto nos hace preguntar si la galaxia existió por siempre o si tuvo un origen; y si tuvo un origen ¿cuál era la composición química de las estrellas originales? Estas preguntas están muy relacionadas con las observa-

ciones de las abundancias químicas cósmicas; que nos dicen que, aproximadamente, el 75% de la materia visible es hidrógeno y que el 24% es helio. Estas preguntas serán tratadas más adelante.
Volviendo a la descripción del diagrama de Hertzsprung-Russell, las estrellas gigantes, supergigantes y las enanas blancas son estrellas de tamaño muy distinto a los de las estrellas en la secuencia principal, que tienen una composición química no homogénea y donde las reacciones nucleares no proveen de una producción relativamente estable de energía.

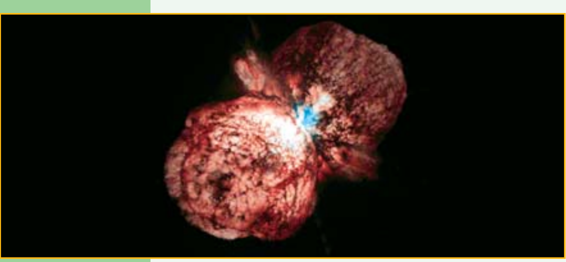


Figura 12.9.
Fotografía de la explosión de la estrella Eta Carinae.



Figura 12.10.
Fotografía de la nebulosa planetaria M2-9.



Figura 12.11.
Fotografía de la nebulosa planetaria NGC 3132.

12.7.13. Nebulosas planetarias

Se ha visto que el final de la vida estelar provee de una variedad de procesos catastróficos. Ellos producen a su vez las llamadas nebulosas planetarias; llamadas así pues son la fuente de nuevos sistemas planetarios, como el nuestro.
El nombre de nebulosa planetaria se debe a la forma más o menos redonda con que se ven estas nebulosas con telescopios pequeños. Usualmente estas nebulosas tienen poco que ver con planetas; siendo en general gases expelidos por estrellas en su último estadio de vida.
La imagen de la figura 12.9 muestra una fotografía de la explosión de la estrella Eta Carinae. La estrella Eta Carinae está a unos 8.000 años luz de distancia. La foto del telescopio Hubble es obtenida con una combinación de una exposición con filtro rojo y otra con filtro ultravioleta. Se calcula que la explosión comenzó hace unos 150 años. Vemos claramente dos glóbulos más o menos esféricos, encontrándose la estrella en el punto de contacto de los mismos. Todavía no se entiende la estructura de esta estrella. Se estima que Eta Carinae tiene alrededor de 100 masas solares; siendo una de las más masivas de nuestra galaxia.
En la figura 12.10 vemos la hermosa nebulosa planetaria M2-9. La velocidad de los gases es de alrededor de 300 km/s. Se calcula que las eyecciones de gas comenzaron hace unos 1.200 años. En este caso también se notan dos lóbulos, pero con una simetría alargada. El sistema estelar central está formado por un par de estrellas muy cercanas. La nebulosa se encuentra a unos 2.100 años luz de distancia.
La nebulosa NGC 3132, que muestra la figura 12.11, está a unos 2.000 años luz de la Tierra y tiene un diámetro de, aproximadamente, medio año luz. Se la conoce como la nebulosa anillo del sur. Los gases se están alejando de la estrella central a unos 15 km/s. Si bien esta nebulosa es el resultado de los estadios finales en la vida de la estrella central; su ulterior evolución podría dar origen a cuerpos de características planetarias. Es probable que nuestro Sol expela una nebulosa similar en unos 6.000 millones de años.

Capítulo
13

Energía en el choque de partículas elementales

13.1. Laboratorios de choques de partículas de altas energías

13.1.1. ¿Dónde se encuentran partículas con altas energías?

Cuando se habla de partículas con altas energías, generalmente, se entiende que estamos hablando de partículas subatómicas, constituyentes de la materia. En las secciones subsiguientes haremos una breve reseña de lo que se entiende por el modelo estándar de la materia, donde nombraremos el conjunto de partículas elementales.
Curiosamente, el protón y el neutrón no son partículas elementales, pues se las entiende como compuestos por *quarks*; como veremos más adelante. Pero cuando hablamos de partículas con altas energías, incluimos todas las partículas subatómicas, incluso las compuestas que no son elementales.
Pero la pregunta natural que surge es:

¿dónde se encuentran partículas con altas energías?

Por un lado se observa que diversos sistemas astrofísicos pueden ser fuente de partículas con muy alta energía; cuya existencia se puede observar de forma indirecta, por sus efectos en las vecindades de la fuente, o en forma directa por detectores en observatorios astronómicos. Por otro lado están los grandes laboratorios aceleradores de partículas que se han usado a lo largo del tiempo. En la actualidad mencionaremos la existencia de dos grandes laboratorios donde se vienen realizando diversos experimentos, el CERN ubicado en Europa y el Fermilab, ubicado en Estados Unidos. Mencionaremos detalles básicos de ellos en las próximas subsecciones. De los observatorios astronómicos de partículas de altas energías mencionaremos el Observatorio Pierre Auger.

13.1.2. El CERN

CERN es una sigla usada para la Organización Europea para la Investigación Nuclear . En 1952 se funda un cuerpo provisorio denominado en francés: “Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire”, o su equivalente en inglés: “European Council for Nuclear Research”; con el mandato de establecer una organización europea para la investigación básica en física. En aquella época la investigación se concentraba en el interior del átomo, por lo que se usó el término ‘nuclear’.
Cuando en 1954 se dio origen oficialmente a la Organización, se retuvo la sigla CERN.
Hoy en día se realizan experimentos con los que se estudia la materia a escalas más pequeñas que el núcleo atómico. Es por ello que al CERN también se lo conoce

como el “Laboratorio Europeo de Física de Partículas”.

Los instrumentos usados en el CERN son aceleradores de partículas y detectores. Los aceleradores de partículas producen haces de partículas de muy alta energía los cuales se arreglan para hacerlos colisionar con blancos apropiados. Con los detectores se observa lo que sucede en esas colisiones.

En 1976 entra en operaciones el “Super Proton Synchrotron”(SPS) que fue el primer gran acelerador, en forma de anillo, construido en un túnel, con una circunferencia de 7 km. La construcción cruza el borde entre Francia y Suiza. El SPS fue concebido como un acelerador de protones. En la actualidad el SPS opera a 450 Gev; o sea, esta es la energía a la que puede acelerar las partículas. En 1983 se observaron las partículas *W* y *Z*, predichas por el modelo estándar. En esa ocasión se usó el SPS para hacer chocar protones con *antiprotones*.

En 1989 el acelerador “Large Electron-Positron”(LEP) entró en operaciones. Es un acelerador de electrones y positrones en forma de anillo con una circunferencia de 27 km; cuya ubicación se indica en la figura 13.1. El LEP operó por siete años a una energía de 100 GeV(giga electrón-volt). Con este acelerador se ganó mucha información sobre el detalle de la física de partículas; en particular se estableció que hay solo tres generaciones de partículas (ver tablas en las secciones subsiguientes). El LEP fue cerrado en noviembre de 2000 para la construcción del LHC (ver próximo párrafo) en el mismo túnel.



Figura 13.1.
Fotografía aérea de la construcción del CERN, en las cercanías de la ciudad de Ginebra en el límite de Francia y Suiza.

El “Large Hadron Collider”(LHC) ha sido construido para responder a preguntas fundamentales de la física de partículas. En particular se espera que se pueda observar el llamado ‘bosón de Higgs’; que es una partícula predicha en el modelo estándar. El LHC acelera dos haces de protones en direcciones opuestas para que luego se los hagan chocar unos con otros.
En la figura 13.2 se observa el interior del túnel donde está construido el LHC. Se pueden acelerar protones a una energía de 7 TeV(tera electrón-volt); lo que corresponde a una velocidad de 99,99% la velocidad de la luz. El LHC fue inaugurado en octubre de 2008. En la actualidad es el acelerador más poderoso construido.
El LHC consta de varios detectores, en la figura 13.3 se ve una foto del detector ALICE. Sus dimensiones se pueden estimar observando el tamaño del operador que aparece en la fotografía.



Figura 13.2.
Fotografía del túnel por donde viajan las partículas que se hacen colisionar en el laboratorio del CERN.

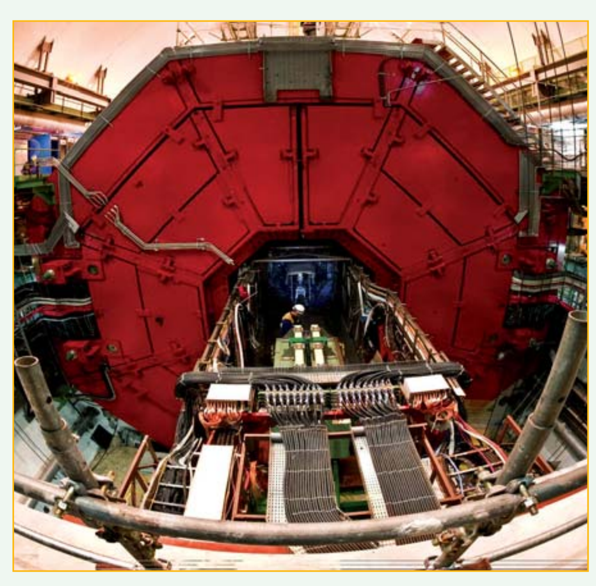


Figura 13.3.
Fotografía del detector ALICE, que está en un tramo del túnel del laboratorio del CERN.

13.1.3. El Fermilab

Se usa el término Fermilab para denotar al "Fermi National Accelerator Laboratory"; que se encuentra cerca de la ciudad de Chicago en Estados Unidos. En la figura 13.4 se presenta una fotografía aérea del laboratorio.



Figura 13.4. Fotografía aérea del Fermilab.

El Tevatron es un acelerador en forma de anillo, en el Fermilab, con una circunferencia de unos 6,28 km. En él se aceleran protones y antiprotones a una energía de 0,980 TeV; para arreglar choques de frente entre las partículas. En 1995 en este detector se observó el quark top. Se debe aclarar que a los quarks se los observa en forma indirecta ya que no se los puede encontrar en estados libres.

13.1.4. Observatorio Pierre Auger

Como mencionamos anteriormente se pueden generar partículas de altas energías en sistemas astrofísicos. Estas partículas viajan por el espacio y pueden impactar en la Tierra. Este fenómeno constituye los llamados *rayos cósmicos*. Los rayos cósmicos están constituidos, principalmente, por núcleos atómicos o electrones y bombardean la Tierra desde todas las direcciones. También se deben mencionar la incidencia sobre nuestro planeta de fotones muy energéticos, como los que aparecen en los llamados "gamma ray bursts", lo que en castellano sería algo así como *estallido de rayos gama*; aunque su rango estudiado de energías ≈ 15−−150 keV (kilo electrón volt), corresponde a energías mucho menores que la que tienen los rayos cósmicos de partículas cargadas.
El estudio de los rayos cósmicos no ha sido fácil pues al ingresar en la atmósfera, normalmente interacciona con las partículas que hay en ella. Es así que, usualmente, a la superficie de la Tierra llegan los efectos secundarios de estas interacciones.
Por este motivo muchos de los estudios de los rayos cósmicos se han venido realizando en satélites en órbita alrededor de la Tierra.
Otro aspecto de los rayos cósmicos a tener en cuenta, es que las partículas cargadas interaccionan con los campos magnéticos interestelares; los cuales afectan fuertemente la trayectoria de los rayos cósmicos. Por este motivo, debido a la existencia de campos magnéticos en nuestra galaxia y en las cercanías del Sol y la Tierra, es un poco complicado inferir el origen de una trayectoria, sólo del estudio de la incidencia de un rayo cósmico.
Históricamente los rayos cósmicos fueron la primer fuente de partículas energéticas

que tuvieron acceso los físicos, antes de que se construyesen los grandes aceleradores de partículas. Así es como la partícula llamada *muón* es descubierta en 1937 del estudio de los rayos cósmicos.
Debido a la existencia de la radiación cósmica de fondo, se calculó que los rayos cósmicos deberían interaccionar con la misma. Los cálculos indicaban que no se podría detectar partículas provenientes de distancias cosmológicas con energías mayores a 5×10^{19} eV.
El caso es que, en observaciones de rayos cósmicos, se han detectado rayos con energías superiores a 10^{20} eV. Esto, mínimamente, provoca el interrogante de cuál puede ser el origen de dichos rayos. Notar que si expresamos esta energía en tera electrónvolt se obtiene 10^{20} eV=10^{8} TeV; o sea que estas energías son alrededor de diez millones de veces mayores a las que se obtienen en los más grandes aceleradores de partículas construidos hasta ahora.
El flujo de partículas energéticas que impactan la superficie de la Tierra disminuye con la energía de las partículas. Para energías alrededor de 1 GeV = 10^{9} eV llegan, aproximadamente, 10.000 partículas por metro cuadrado por segundo. Para energías alrededor de 1 TeV = 10^{12} eV llega aproximadamente 1 partícula por metro cuadrado por segundo. Para energías alrededor de 10^{16} eV llegan pocas partículas por metro cuadrado por año. Para energías alrededor de 10^{19} eV llega aproximadamente 1 partícula por kilómetro cuadrado por año.
El Observatorio Pierre Auger consta de un gran conjunto de detectores esparcidos en grandes extensiones de la superficie terrestre. Al presente existe un observatorio en el hemisferio sur y un proyecto de construir otro en el hemisferio norte. El observatorio del hemisferio sur está ubicado en la provincia de Mendoza, cerca de Malargüe y cubre una superficie de unos 3.000 km^{2}. El proyecto para el hemisferio norte está ubicado en el estado de Colorado en Estados Unidos.

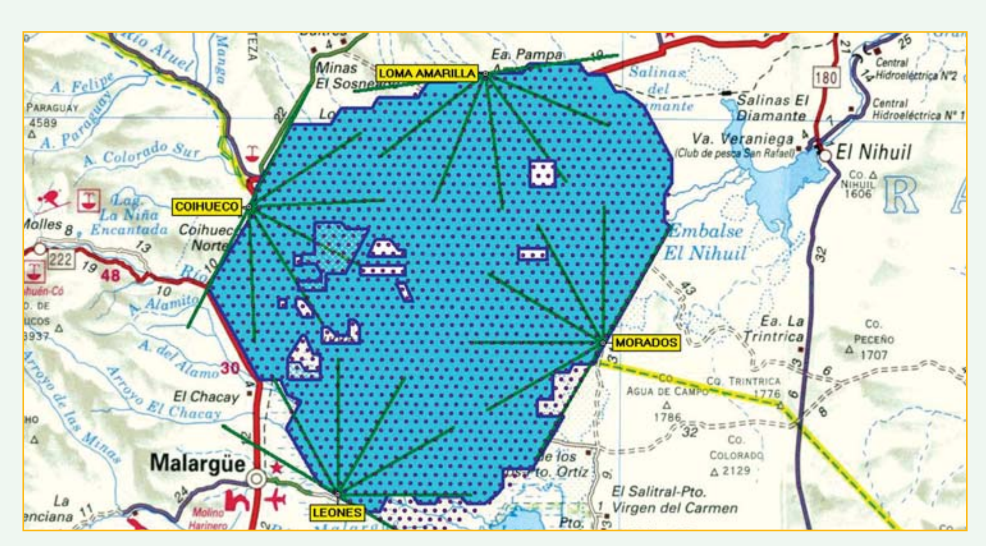


Figura 13.5.
Porción de mapa donde se muestra la ubicación del Observatorio Pierre Auger, cerca de Malargüe, Mendoza, Argentina.

El Observatorio Auger usa dos técnicas para detectar y estudiar rayos cósmicos muy energéticos. En una técnica se detecta la interacción de partículas energéticas con agua, ubicada en tanques sobre la superficie terrestre. La otra técnica estudia el fenómeno del desarrollo de cascada de partículas observando la luz ultravioleta emitida a grandes alturas en la atmósfera, cuando pasa un rayo cósmico muy energético.

En el primer método se usan 1.600 tanques de 12.000 litros, separados entre ellos por una distancia de 1,5 km. En el segundo método se detecta la fluorescencia del nitrógeno ubicado en la alta atmósfera.

En la figura 13.7 se muestra una fotografía de detectores de fluorescencia usado en el observatorio.

La figura 13.8 muestra una reconstrucción gráfica de un evento muy energético en que los cuatro telescopios pudieron detectar la entrada del rayo cósmico.

La figura 13.9 muestra la gráfica de la esfera celeste en coordenadas galácticas donde se muestran la dirección de procedencia de algunos de los eventos más energéticos.



Figura 13.6.
Esquema del diseño del Observatorio Pierre Auger.

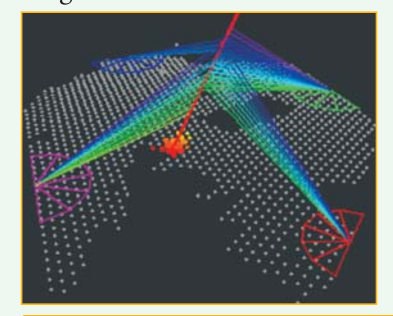


Figura 13.8.
Reconstrucción gráfica de un evento de muy alta energía que fue detectado por los cuatro telescopios ubicados en los costados del campo de observación.



Figura 13.7.
Fotografía de detectores de fluorescencia del Observatorio Pierre Auger Sur.

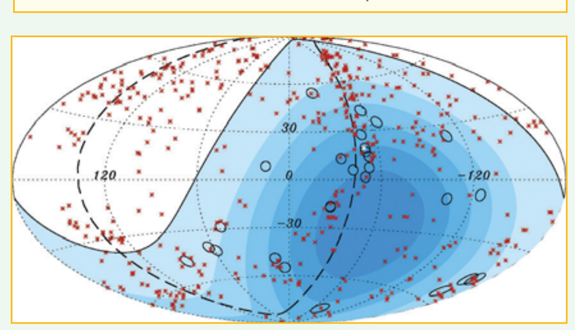
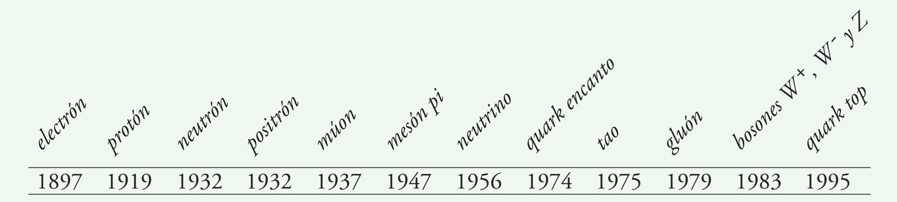


Figura 13.9.
Ubicación de los eventos más energéticos, marcados con círculos rojos, en la esfera celeste en coordenadas galácticas. Las marcas puntuales señalan la ubicación de conglomerados de galaxias.

13.2. La estructura de la materia

13.2.1. Algunas de las partículas observadas

La materia está compuesta por átomos que, a su vez, pueden formar moléculas. El átomo más pequeño es el átomo de hidrógeno; cuyas dimensiones son del orden de 5×10^{-11}m.
La distancia intermolecular en un sólido es del orden de 10^{-10}m; por lo que es comparable a las dimensiones atómicas.
Toda la materia la podemos entender como compuesta por partículas elementales. Por ejemplo, los átomos se pueden entender como compuestos fundamentalmente por protones, electrones y neutrones.
Sin embargo existen otras partículas elementales.
Las distintas partículas se han venido descubriendo por medio de distintas técnicas a lo largo de los años. La tabla 13.1 muestra la secuencia de descubrimiento de algunas partículas.



electrón	*protón*	*neutrón*	*positrón*	*múon*	*mesón pi*	*neutrino*	*quark encanto*	*tao*	*gluón*	*bosones W^+, W^- y Z*	*quark top*
1897	1919	1932	1932	1937	1947	1956	1974	1975	1979	1983	1995

Tabla 13.1. Tabla de descubrimientos a lo largo de los años

Una manera de organizar el estudio de partículas es considerar aquellas que son estables cuando están en estado libre. Ellas son enumeradas en la tabla 13.2.
Denotamos con e la carga eléctrica del electrón. El símbolo $[\hbar]$ se usa para el valor de la constante de Planck h dividida por 2π. La masa la hemos presentado en unidades de energía; luego de haberla multiplicado por la velocidad c al cuadrado. Un eV es la energía que adquiere una carga de un electrón cuando su potencial electrostático es incrementado en un Volt. Un MeV es un millón de veces un eV.

Tipo	*Nombre*	*Símbolo*	*Antipartícula*	*Carga [e]*	*Espín [h]*	*Masa c^2 [MeV]*	*Vida media [s]*
bosones	*fotón*	γ	γ	0	1	0	∞
leptones	*electrón*	e^-	e^+	-1	1/2	0,511	∞
	neutrino del electrón	ν_ε	$\bar{\nu}_\varepsilon$	0	1/2	< 0,00002	∞
	neutrino del muón	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	1/2	< 0,3	∞
	neutrino tau	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	1/2	< 40	∞
bariones	*protón*	p	p^-	1	1/2	938	$> 10^{40}$

Tabla 13.2. Tabla de las partículas estables

Si bien no se ha visto decaer al protón, existe una teoría que da la posibilidad de que pueda decaer.
Se observa la ausencia de esta tabla del neutrón, dado que en estado libre tiene una vida media de aproximadamente 900 segundos. Si considerásemos como estables todas las partículas con tiempo de decaimiento mayor a 15 minutos, entonces la tabla tendría una sola entrada más y esta sería la del neutrón.

13.2.2. Partículas fundamentales del modelo estándar

Cuando se observó experimentalmente que los protones y neutrones se comportaban como si tuviesen estructura interna no trivial; se intentó dar una explicación de ellos en término de partículas fundamentales. Esto condujo a la postulación de la existencia de los quarks. Con posterioridad se construyó una teoría que hoy completa lo que se puede denominar el modelo estándar de la materia.
Los constituyentes del modelo estándar observados se muestran en las tablas [Gro08] 13.3 y 13.4.

Tipo	*Cargas eléctricas [e]*	*Familias*		
		I	II	III
quarks	2/3 -1/3	u [0,003] d [0,006]	c [1,27] s [0,1]	t [171] b [4,2]
leptones	0 -1	ν_e [$<10^{-8}$] e [0,000511]	ν_μ [$<$ 0,0002] μ [0,106]	ν_τ [$<$ 0,02] τ [1,777]

Tabla 13.3. Constituyentes del modelo estándar. Al lado de cada partícula, entre corchetes, se muestra la masa de cada partícula en unidades de energía giga electrón volt [GeV]; por lo que para obtener la masa en kg se debe primero expresar la cantidad en joule y luego dividir el valor obtenido por c^2.

Notamos en la tabla 13.3 la aparición de seis quarks; todos ellos tienen espín $\frac{1}{2}$. Se denominan *up* (arriba), *down* (abajo), *charm* (encanto), *strange* (extraño), *top* (superior) y *bottom* (inferior); usándose la primera letra de estas palabras inglesas como símbolo de las partículas. También vemos los leptones que se encontraban en la tabla 13.2. Los leptones también tienen espín $\frac{1}{2}$.

Bosones de interacción	*Interacción*
g (gluon) [0]	*fuerte*
γ *(fotón)* [0]	*electromagnética*
W [80,4]	*débil*
Z [91,2]	*débil*

Tabla 13.4. Partículas encargadas de las interacciones. Como en el caso anterior, al lado de cada partícula, entre corchetes, se muestra la masa de cada partícula en unidades de energía giga electrón-volt [GeV]

En la tabla 13.4 se muestran los bosones detectados del modelo estándar. La interacción entre quarks está gobernada por los gluones; que en castellano se traduciría algo así como 'pegatones' (deformación de la palabra pegamento). La interacción entre partículas cargadas se realiza por medio de los fotones, que se denotan por γ. Las interacciones débiles se realizan por medio de los bosones W y Z. Todos estos bosones tienen espín 1.

13.2.3. Las interacciones

En la tabla 13.5 se muestra el conjunto de las interacciones que usamos para describir las propiedades de la materia, donde se indica el alcance y el tipo de descripción que se tiene para cada una de ellas.

Interacción	*Teoría*	*Alcance*	*Tipo de descripción*
Gravitación	*Relatividad General*	*Infinito*	*Clásica (al presente)*
Electromagnética	*Electrodinámica*	*Infinito*	*Clásica y cuántica*
Débil	*Modelo electrodébil*	*Corto*	*Cuántica*
Fuerte	*Cromodinámica*	*Corto*	*Cuántica*

Tabla 13.5. Interacciones

A principios del siglo 20 se notó que la materia obedece a leyes que se apartan de las predicciones de la física newtoniana, también llamada física clásica. Esto obligó al desarrollo de la llamada física cuántica. Uno de los aspectos característicos de la física cuántica es que no se puede medir la posición y momento de una partícula con infinita precisión; dado que existe el llamado principio de incertidumbre de Heisenberg.

13.2.4. Características de partículas atómicas y subatómicas

En la tabla 13.6 se muestran dimensiones características de algunas de las partículas atómicas y subatómicas.

Sistema o partícula	*Constituyentes*	*Dimensiones características*
átomo	*núcleo y nube electrónica*	10^{-10} *m*
núcleo	*protones y neutrones*	10^{-14} *m*
protón	*dos quarks u y un quark d*	10^{-15} *m*
neutrón	*dos quarks d y un quark u*	10^{-15} *m*
quark	*"elemental"*	$< 10^{-19}$ *m*
electrón	*"elemental"*	$< 10^{-18}$ *m*

Tabla 13.6. Dimensiones del mundo subatómico

En el caso del quark y del electrón sólo se ha puesto un límite superior a alguna noción de tamaño. Es probable que estas partículas no tengan estructura, con lo que se quiere decir que en la descripción de un espaciotiempo continuo serían puntua-

les. Pero por ejemplo, en el caso del quark es difícil asignarle propiedades de partículas a los mismos pues hasta ahora no se ha observado ningún quark libre. En realidad se entiende que los quarks deben estar siempre confinados, por lo que no se los observará en estado libre.
La tabla 13.7 muestra algunas características básicas de los protones y neutrones. Notar que la masa de los mismos es mucho mayor que la suma de las masas de los quarks correspondientes.

Nombre	*Símbolo*	*Contenido de quarks*	*Carga eléctrica [e]*	*Masa [GeV]*	*Espín*
protón	*p*	*uud*	1	0,938	1/2
neutrón	*n*	*udd*	0	0,940	1/2

Tabla 13.7. Características de protones y neutrones.

13.2.5. La necesidad de partículas con altas energías

La historia del conocimiento que tenemos de las partículas elementales [Gri87] tiene la constante que siempre se buscó experimentos que involucren cada vez mayor energía. Es así que a medida que pasó el tiempo se pudo detectar partículas con masas cada vez mayores.
Además del interés en descubrir partículas con mayores masas, existe otra razón para realizar experimentos con partículas de altas energías. Partículas con altas energías viajan con velocidades muy grandes, lo que implica que su momento p es también muy alto. La longitud de onda λ de 'de Broglie' para una partícula de momento p está dada por $\lambda = h/p$, donde h es la constante de Planck. Cuando uno hace chocar una partícula de momento p, a lo sumo puede resolver distancias del orden de λ; por lo que para poder tener información de distancias muy pequeñas, se debe realizar choques de partículas con momentos muy grandes, y por ende de altas energías.

13.2.6. Leyes de conservación en choques de partículas de altas energías

En los procesos de choques de partículas de altas energías normalmente uno prepara un experimento u observación donde se distingue claramente un grupo de partículas que se envía a chocar (que denotaremos *en*) y otro grupo que sale del proceso de colisión (que denotaremos *sal)*. Por leyes de conservación se entiende números característicos asignados al conjunto de partículas *en* que también se observan en las partículas *sal*. Por ejemplo, si en el conjunto de partículas *en* se observa que la carga eléctrica es $3e$, en el conjunto de partículas *sal* también se observa que la carga eléctrica es $3e$.
Seguidamente mencionamos algunos de los números característicos que se conservan [Gro08] en los choques de partículas de altas energías y a continuación explicaremos el significado de los números nuevos. Se conservan:

- la carga eléctrica;

- números leptónicos L_e , L_μ y L_τ. (Estos números se conservan excepto por los recientes efectos detectados de mezcla de neutrinos. Si los neutrinos tienen una

pequeña masa, entonces los números leptónicos no se conservarían por separado);

- sabor hadrónico: se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas. El cambio de sabor en procesos de interacción débil está determinado por la teoría;

- número bariónico.

Los leptones tienen número leptónico por familia; o sea, por ejemplo el electrón y el neutrino del electrón ν_e tienen número leptónico $L_e = 1$, $L_\mu = 0$ y $L_\tau = 0$. Similarmente para las otras partículas. Donde se debe recordar que las antipartículas tienen la misma masa pero sus "cargas" con signos opuestos. Un ejemplo de conservación del número leptónico lo da el decaimiento del neutrón:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e; \qquad (13.1)$$

dado que el electrón e^- tiene $L_e = 1$ y el antineutrino del electrón ν_e tiene $L_e = -1$. Vemos entonces, que el decaimiento del neutrón en sólo un protón y un electrón, sin antineutrino, está prohibido por la ley de conservación del número leptónico.
Cada tipo de quark tiene un número característico llamado *sabor* o *sabor hadrónico*; por lo que hay 6 sabores.
Los quarks tienen número bariónico 1/3. Por lo que los bariones, como el protón y el neutrón, tienen número bariónico 1. Los mesones tienen número bariónico cero, dado que los antiquarks tienen número bariónico -1/3. Desde el punto de vista teórico se especula con que el número bariónico no se conserve exactamente [RS96], pero no se encuentran evidencias observacionales para ello.

13.3. Notas históricas

Haremos aquí una muy breve reseña de algunos descubrimientos y avances en el conocimiento de la física de partículas elementales.
La primera observación de una partícula elemental se suele asociar a los experimentos de J. J. Thomson en 1897 que resultaron en el descubrimiento del electrón.
Posteriormente experimentos de Rutherford aclararon que la estructura del átomo consistía en un núcleo masivo con cargas positivas rodeado de la nube de electrones.
Un tiempo más tarde, en 1932, se descubre el neutrón, con lo que se completa una imagen más o menos sencilla de la estructura atómica.
A principios del siglo XX, también, queda claro que la radiación electromagnética está cuantizada en la forma de fotones, como ya vimos anteriormente.
Como los fotones se entienden como los mediadores de las interacciones electromagnéticas, se pensó que debían existir partículas mediadoras de las interacciones nucleares, que explicasen la atracción entre neutrones y protones en los núcleos atómicos. Alrededor de 1934 Yukawa estimó que dichas partículas deberían tener una masa de alrededor de 300 veces la masa del electrón, o lo que es lo mismo aproximadamente un sexto de la masa del protón. Por este motivo a estas partículas se las llamó *mesones*.
La teoría relativista del electrón indicó la existencia del antielectrón; lo que a su vez sugirió la existencia de antipartículas en general. En 1931, se descubre al positrón,

la antipartícula del electrón, con su misma masa pero carga eléctrica opuesta.
No se entiende bien porqué el Universo está compuesto de materia en vez de antimateria. Pero la asimetría es saludable dado que cuando materia y antimateria se juntan, se aniquilan.
En su momento el estudio del llamado decaimiento β, o sea la emisión de un electrón por un núcleo, condujo a una incógnita respecto de la conservación de la energía. Como la física del mundo atómico y subatómico está explicada por la mecánica cuántica, se sabía que las energías de los núcleos debían formar un espectro discreto. Sin embargo se observaba que los electrones del decaimiento β tenían un espectro continuo de energía. Alrededor de 1930 Wolfgang Pauli predijo la existencia de una partícula neutra de muy poca masa, con el objeto de preservar el principio de conservación de la energía y momento en los procesos de desintegración de partículas. Hubo que esperar hasta 1953 para poder observar la existencia de los neutrinos.
Con el correr del tiempo, se fueron descubriendo muchas partículas y con ellas nuevas leyes de conservación que involucraron nuevas cargas; como por ejemplo la extrañeza. Al acomodar los bariones en término de carga eléctrica y carga de extrañeza se observó un arreglo en octetos.
Con los mesones conocidos a ese momento también se observó un arreglo en octetos. A esto se lo llamó 'El Camino Óctuple' (The Eightfold Way). Estas observaciones de las distintas partículas comenzaron a sugerir que las mismas eran probablemente compuestas de otras partículas más elementales; lo que finalmente condujo al modelo de quarks.
El modelo en término de quarks afirma que: [Gri87]

- cada barión (partículas pesadas) está compuesto de tres quarks;

- cada mesón (partículas de peso medio) está compuesto por un quark y un antiquark.

En 1964, O. W. Greenberg propuso que los quarks debían tener, además, otro tipo de carga que se la llamó *color*, con tres variantes: *rojo*, *verde* y *azul*. De esta forma un quark rojo tiene una carga de rojizo, cero carga de verdoso y cero carga de azulado. Se debe enfatizar que el uso de los términos ya conocidos como: color, rojo, azul, verde; sólo se eligieron por el hecho que se necesitaban tres posibilidades. Pero, además, porque resulta que los bariones, usando esta analogía, deben ser blancos; esto es, deben tener un quark de cada color. Similarmente, como los mesones están compuestos de un quark y un antiquark, tampoco tienen color; dado que los antiquarks tienen la carga opuesta del color, por ejemplo: menos rojizo. Se tiene, entonces que todas las partículas naturales no tienen color. Esta regla entonces excluye por ejemplo la posibilidad de tener en la naturaleza una partícula constituida por dos quarks, o por cuatro quarks, o dos quarks y un antiquark. El caso de seis quarks se lo entendería como el caso de dos bariones en estado ligado.
Hacia el principio de la década de 1970 la materia se explicaba en término de sólo tres quarks u, d y s. Sin embargo el descubrimiento en 1974 de una nueva partícula, en ocasiones llamada J/Ψ, sugirió la existencia de otras variantes de quarks. A las variantes de quarks se las llamaba *sabores*. Fue así como se introdujo el quark c.

Ulteriores descubrimientos de partículas necesitaron de la inclusión de los quarks *b* y *t*. La teoría electrodébil introducida independientemente por Weinberg y Salam, describía las interacciones débiles por medio de dos bosones mediadores cargados: el W^+ y el W^-, y de un bosón mediador neutro, el Z. Estas partículas fueron luego observadas en el CERN en 1983.

La visión actual que se tiene del modelo estándar, es que la materia y sus interacciones son explicadas en término de tres clases de partículas elementales: leptones, quarks y mediadores (o bosones de interacción).

En la tabla 13.3 (pág. 130) vemos que hay 6 leptones. Naturalmente también están los correspondientes 6 antileptones; por lo que en total se dispone de 12 leptones.

Vemos también que hay 6 'sabores' de quark; los cuales como dijimos vienen en 3 colores, lo que lleva a un total de 18 quarks. Pero como también se deben considerar los antiquarks, se dispone en total de 36 quarks y antiquarks.

Entre los mediadores contamos el fotón, los bosones W^+, W^-, y Z y 8 gluones; lo que hace un total de 12 mediadores.

Además el modelo Glashow-Weinberg-Salam predice la existencia de otro bosón, la llamada partícula de Higgs. El experimento que se está llevando a cabo en el CERN es casualmente para detectar la partícula de Higgs.

Así se llega a una descripción de toda la materia en término de 61 partículas elementales.

Ante esta situación, uno se podría preguntar si tal vez los quarks son partículas compuestas constituidas por otras verdaderas partículas elementales. O tal vez se pueda decir lo mismo de los bosones.

Por un lado se puede afirmar que por ejemplo los leptones y el fotón, son partículas elementales. Pues no hay ningún indicio en los experimentos que indique ninguna estructura extra de estas partículas.

Por otro lado, podemos hacer una breve reflexión y recordar las palabras de Dirac. En una descripción clásica de la materia uno intentaría explicar el comportamiento de un sistema en término de pequeñas partes constituyentes del mismo. Cada parte a su vez se la puede pensar constituida por otras partes más pequeñas. Si este procedimiento se lo considera iterativamente sin ningún límite, nos conducirá a la necesidad de manejar una información infinita para describir cualquier pedazo finito de materia. Ante esto Dirac afirmó: "Mientras *grande* y *pequeño* sean conceptos relativos, no será de ayuda explicar lo grande en término de lo pequeño. Es entonces necesario modificar las ideas clásicas de tal forma de dar un significado absoluto al tamaño". [Dir58]

Tomando en cuenta todo esto, nos da la impresión que estamos en presencia de un modelo, el llamado modelo estándar de la materia, que hace uso de los constituyentes fundamentales de la misma.

El avance del conocimiento científico probablemente nos provea de un mejor entendimiento de la teoría que explica el comportamiento de la materia.

Capítulo 14

Importancia de la energía en el contexto social

14.1. La energía en las actividades de la sociedad

En la actividad cotidiana, normalmente hacemos uso de una diversidad de máquinas y dispositivos que necesitan energía para su funcionamiento. Además en las actividades de la sociedad se encuentran otros sistemas complejos que requieren de mucha energía para la concreción de sus objetivos; por ejemplo pensemos en la industria automotriz.

Como conjunto, entonces, la sociedad, tanto desde la suma de necesidades de cada individuo como de las necesidades de sistemas complejos, requiere de una cantidad de energía para desarrollar sus actividades habituales.

Las distintas actividades requieren de distintos dispositivos que, a su vez, disponen de diversos mecanismos de funcionamiento. Si pensamos en una casa podemos distinguir, fácilmente, por un lado, el sistema de suministro eléctrico para el funcionamiento de iluminación y otros aparatos y el usual suministro de gas para el funcionamiento de la cocina y otros usos. Es así que en el desarrollo de la sociedad se construyen sistemas de producción y transporte de energía que se adaptan para cada uso. En algunos casos deberíamos hablar de producción de combustibles, más que de energía; pues en ellos, la energía sólo se obtiene al realizar una reacción química que libera la energía disponible.

Algunos de los combustibles más usados son petróleo, gas y carbón. De ninguno de estos se dispone de recursos ilimitados. Es así que la demanda creciente de energía y el hecho que los recursos se agotan, requiere que tomemos control de la situación energética de la sociedad en la que vivimos. Además existen otros motivos para prestar atención al tema energético, como son una posición estratégica de nuestra sociedad frente al esquema mundial de producción y consumo de energía.

En lo que sigue veremos en particular las fuentes y consumo de energía para el caso de la sociedad que vive en Argentina.

14.2. Balance energético en Argentina

En el estudio de los recursos y consumos energéticos de la sociedad humana surgen naturalmente por un lado el conjunto global de toda la sociedad sobre el planeta y por otro lado la unidad de países. Usaremos principalmente los datos de la Argentina, que es el país donde se escribe este libro; aunque también haremos comparaciones con otros países y los datos globales.

En la tabla 14.1 se muestran los datos más modernos que ha podido conseguir el

autor sobre la oferta interna de energía primaria en Argentina, que son del año 2007.

La *Oferta Interna* representa el total de energía, efectivamente, disponible para ser transformada o ser consumida dentro del país. La oferta interna fundamentalmente toma en cuenta la producción de energía, más la importación, menos la exportación.

Fuentes de Energía Primaria	*[ktep]*	*[GWa]*
hidráulica	3.499	4,64
nuclear	2.172	2,88
gas natural	42.288	56,13
petróleo	30.187	40,07
carbón mineral	381	0,51
leña	1.156	1,53
bagazo	1.014	1,35
otros primarios	605	0,8
TOTAL	81302	107,92

Tabla 14.1.
Oferta interna de energía primaria en la Argentina. Datos del año 2007, tomados de la página en Internet de la Secretaría de Energía, Ministerio de Planificación Federal, Inversión Pública y Servicios. Las unidades ktep son `miles de toneladas equivalentes de petróleo'; mientras que GWa significa giga watt año.

Se usa el término de *energía primaria* para denotar las distintas fuentes de energía en el estado que se obtiene de la naturaleza. Ejemplos son: energía hidráulica, energía eólica, energía solar, petróleo, carbón mineral, leña, etc.
Se denomina *energía secundaria* a los diferentes productos energéticos que son producidos a partir de energías primarias. Ejemplos son: energía eléctrica, gas distribuido por redes, kerosenes, diesel oil, gas oil, fuel oil, etc.
El bagazo de caña, que surge como residuo del prensado de la caña para la producción azucarera, se lo transforma en energía eléctrica en centrales; siendo la propia industria azucarera el principal consumidor.
En el conjunto 'otros primarios' se encuentran: energía eólica, energía solar, residuos del agro que se utilizan como combustible, etc.
La Secretaría de Energía usa como unidad para medir energía el ktep, que significa 'miles de toneladas equivalentes de petróleo'; además, usa la relación entre giga watt hora [GWh] y [ktep] dada por 1 GWh = 0,086 ktep. Para medir estas grandes cantidades de energía emplearemos las unidades más físicas y convenientes de giga watt año [GWa]; haciendo uso de esta regla 1 año = 8.760 horas. Por ejemplo, la central nuclear de Embalse, en la provincia de Córdoba, genera aproximadamente 600 MW, o lo que es lo mismo 0,6 GW; por lo tanto 1 GWa es del orden de la energía que genera una central nuclear en un año.

Tipo de energías	*Formas de energías*	*[ktep]*	*[GWa]*
Primarias	*leña*	439	0,58
	bagazo	869	1,15
Secundarias	*electricidad*	8.473	11,25
	gas distribuido por redes	20.315	26,97
	gas licuado	1.676	2,22
	motonafta total	4.733	6,28
	kerosene y aerokerosene	1.286	1,71
	diesel oil + gas oil	9.910	13,15
	fuel oil	395	0,52
	carbón residual	1.025	1,36
	no energético	2.934	3,89
	gas de coquería	105	0,14
	gas de Alto Horno	172	0,23
	coque de carbón	407	0,54
	carbón de leña	229	0,3
	subtotal secundarias	51.660	68,57
TOTAL		52.968	70,31

Tabla 14.2.
Consumo final de energía en la Argentina. Datos del año 2007, tomados de la página en Internet de la Secretaría de Energía, Ministerio de Planificación Federal Inversión Pública y Servicios. Las unidades ktep son 'miles de toneladas equivalentes de petróleo'; mientras que GWa significa giga watt año.

En la tabla 14.2 se muestran los valores de energía consumidos en Argentina asignados al año 2007.
En la tabla 14.3 se mues-

	[GWa]
oferta interna	107,92
consumo final	70,31
DESBALANCE TOTAL	34,85%

Tabla 14.3. Relación entre oferta interna total de energía primaria con consumo final total de energía en la Argentina. Datos de las dos tablas anteriores.

tran la relación entre los valores de oferta interna total y consumo final total de energía en Argentina, correspondiente al año 2007; donde hemos tomado los datos de las tablas anteriores, reproduciendo el formato de la presentación de la Secretaría de Energía.

La magnitud de este desbalance total provoca la preocupación sobre la eficiencia del sistema energético argentino. Pero, en realidad, esta manera de presentar los datos del balance energético ocultan la incidencia que tienen las exportaciones e importaciones tanto en las fuentes de energía primaria como en la oferta de energías secundarias. Por este motivo, presentamos un esquema simplificado del balance energético, tomando en cuenta producción, exportación e importación de los distintos tipos de energía; adjudicando a pérdidas (o ganancias) del sistema todo otro factor que incida sobre el balance, como por ejemplo la variación del posible almacenamiento (stock) de algún tipo de energía. Este esquema simplificado permite, fácilmente, comparar la eficiencia del sistema energético del país contrastando el balance energético con otros países y regiones.

De esta forma para la Argentina se tiene el 'balance energético simplificado' dado por la tabla 14.4.

Tabla 14.4. Balance Energético Simplificado de la Argentina. Datos del año 2007, tomados de la página en Internet de la Secretaría de Energía, Ministerio de Planificación Federal, Inversión Pública y Servicios. Las unidades ktep son 'miles de toneladas equivalentes de petróleo'; mientras que GWa significa giga watt año.

Flujo de energía	*Detalle*	[ktep]	[GWa]
entrante	*producción energía primaria*	81.609	108,33
	importación energía primaria	3.596	4,77
	importación energía secundaria	1.849	2,45
	subtotal entrante	87.054	115,55
saliente	*consumo final energía primaria*	1.308	1,74
	consumo final energía secundaria	51.660	68,57
	exportación energía primaria	3.983	5,29
	exportación energía secundaria	8.425	11,18
	subtotal saliente	65.376	86,78
PÉRDIDA DEL SISTEMA		24,9%	24,9%

Vemos del Balance Energético Simplificado que las pérdidas del sistema no son tan altas como las sugeridas por la tabla 14.3, pero sin embargo son de preocupante magnitud. En lo que sigue presentaremos tablas similares correspondientes a otros países y regiones.

14.3. Balance energético en otros países

14.3.1. Datos energéticos de Paraguay

El Balance Energético Simplificado de Paraguay, correspondiente al año 2005, es presentado en la tabla 14.5.

Flujo de energía	Detalle	[ktep]	[GWa]
entrante	producción energía primaria	7779,61	10,33
	importación energía primaria	35,42	0,05
	importación energía secundaria	1103,33	1,46
	subtotal entrante	8918,36	11,84
saliente	consumo final energía primaria	1934,36	2,57
	consumo final energía secundaria	1765,79	2,34
	exportación energía primaria	0	0
	exportación energía secundaria	3770,87	5,01
	subtotal saliente	7471,14	9,92
PÉRDIDA DEL SISTEMA		16,23%	16,23%

Tabla 14.5. Balance Energético Simplificado del Paraguay.

En este caso se observa una mejor eficiencia del sistema energético que el caso argentino.

14.3.2. Datos energéticos de Bolivia

El Balance Energético Simplificado de Bolivia, correspondiente al año 2007, es presentado en la tabla 14.6.

Flujo de energía	Detalle	[ktep]	[GWa]
entrante	producción energía primaria	111.451,32	147,94
	importación energía primaria	0	0
	importación energía secundaria	3.269,78	96,47
	subtotal entrante	114.721,1	152,28
saliente	consumo final energía primaria	10.062,64	13,36
	consumo final energía secundaria	18.333,54	24,34
	exportación energía primaria	72.675,71	96,47
	exportación energía secundaria	3.429,13	4,55
	subtotal saliente	104.501,02	138,71
PÉRDIDA DEL SISTEMA		8,91%	8,91%

Tabla 14.6. Balance Energético Simplificado de Bolivia.

En este caso se observa una mejor eficiencia del sistema energético que el caso argentino.

14.3.3. Datos energéticos de Brasil

El Balance Energético Simplificado de Brasil, correspondiente al año 2006, es presentado en la tabla 14.7.
En este caso se observa una mejor eficiencia del sistema energético que el caso argentino.

14.3.4. Datos energéticos de Estados Unidos

En la tabla 14.8 se presenta el Balance Energético Simplificado de Estados Unidos,

considerando sólo la energía primaria, correspondiente al año 2007.

Flujo de energía	*Detalle*	*[ktep]*	*[GWa]*
entrante	*producción energía primaria* *importación energía primaria* *importación energía secundaria*	211.541 37.748 20.599	280,8 50,11 25,16
	subtotal entrante	269.888	358,25
saliente	*consumo final energía primaria* *consumo final energía secundaria* *exportación energía primaria* *exportación energía secundaria*	63.400 139.498 18.952 16.147	84,16 185,17 25,16 21,43
	subtotal saliente	23.799,7	315,91
PÉRDIDA DEL SISTEMA		11,82 %	11,82 %

Tabla 14.7. Balance Energético Simplificado de Brasil.

Existen varias definiciones de Btu por lo que para hacer comparaciones hemos usado la relación ISO de 1Btu = 1054,804 J.
Notando que un GWa es 1 GWa = 10^9 W ×8760×60×60 s = 31,536×10^{15} J se tiene que 1 QBtu = 1054,804 × 10^{15} J = 33,4476 GWa.

Flujo de energía	*Detalle*	*[QBtu]*	*[GWa]*
entrante	*producción energía primaria* *importación energía primaria* *importación energía secundaria*	71,7 34,6 -	2.398 1.157 -
	subtotal entrante	106,3	3.555
saliente	*consumo final energía primaria* *consumo final energía secundaria* *exportación energía primaria* *exportación energía secundaria*	101,6 - 5,36 -	3.398 - 179 -
	subtotal saliente	106,9	3.575
PÉRDIDA DEL SISTEMA		0 %	0 %

Tabla 14.8. Balance Energético Simplificado de Estados Unidos considerando sólo la energía primaria.

Ejercicio 14.1 Dado que la eficiencia del sistema energético de la Argentina parece ser uno de los peores del mundo, resulta natural realizar un ejercicio que tienda a detectar donde está el agujero negro por donde se pierde la energía.
El ejercicio consiste en:
- buscar la información de la evolución temporal de producción y consumo de los distintos tipos de energía que contribuyen al sistema energético argentino;
- hacer una gráfica del desbalance para cada tipo de energía por separado como función del tiempo.
Si encuentra una forma de energía que manifieste un quiebre en algún momento, sería un indicio de que algo ha sucedido con la administración en el proceso de producción, transporte y/o consumo de la misma.

14.4. Datos energéticos del mundo

14.4.1. Producción global de energía

Para poder tener una comparación con la producción de energía de cada sociedad, presentamos la producción total de energía mundial. Según la International Energy Agency, la producción total de energía mundial del año 2006 fue de 11.795.752 ktep = 15.657 GWa.

14.4.2. Evolución de las reservas de petróleo de varios países

Es reconocida la incidencia que tiene el petróleo en el cálculo de la energía producida y consumida por cada sociedad. Por ser un combustible no renovable, motiva a tener presente las reservas del crudo. En el gráfico de la figura 14.1 se muestra la evolución temporal de las reservas de petróleo para tres países, incluida la Argentina, y los correspondientes a todo el mundo.

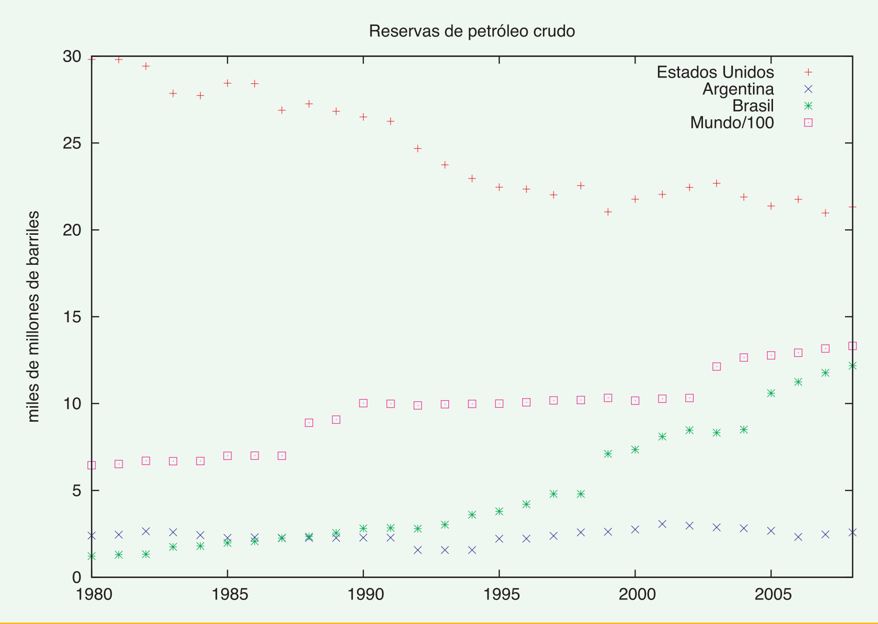


Figura 14.1. Gráfico de la evolución temporal de las reservas de petróleo obtenidos de la Energy Information Administration, de Estados Unidos. Las reservas de petróleo de Estados Unidos muestran una paulatina baja. El caso de Brasil y el Mundo muestran curiosamente una curva ascendente. En Brasil se explica debido a recientes descubrimientos de nuevas reservas petroleras. En el caso del Mundo también se debe a nuevos criterios para contabilizar las reservas. El zigzagueante comportamiento de las reservas de petróleo de Argentina no se entiende, dado que no hay indicios que indiquen que se estén realizando exploraciones para encontrar nuevas reservas; lo que hace dudar de la certeza de los datos.

14.4.3. Relación entre el producto bruto y el consumo de energía

La Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) es una orga-

nización internacional de 30 países que opera desde 1961. La organización provee de un foro donde los gobiernos comparan experiencias y buscan soluciones a problemas comunes. Los tópicos incluyen temas económicos, del medio ambiente y sociales.

Los estados miembros de la OECD son: Australia, Austria, Bélgica, Canadá, República Checa, Dinamarca, Finlandia, Francia, Alemania, Grecia, Hungría, Islandia, Irlanda, Italia, Japón, Korea, Luxemburgo, México, Países Bajos, Nueva Zelanda, Noruega, Polonia, Portugal, Eslovaquia, España, Suecia, Suiza, Turquía, Reino Unido y Estados Unidos.

En el reporte anual de la organización del año 2008 se encuentra que los países de la OECD contribuyen con el 78% de la producción económica mundial, el 18% de la población, el 49% de la emisión de CO_2 en la atmósfera y el consumo del 59% de la energía eléctrica producida mundialmente.

En breve se puede decir que la OECD agrupa a las economías más desarrolladas del planeta.

Existe una correlación entre el consumo total de energía y la actividad económica, que se puede medir por el Producto Bruto Interno (PBI). En la figura 14.2 se muestra la evolución temporal de 1980 al 2008 del consumo de energía y del PBI para el conjunto de los países OECD; donde se toma como valor unidad los datos correspondientes al año 1980.

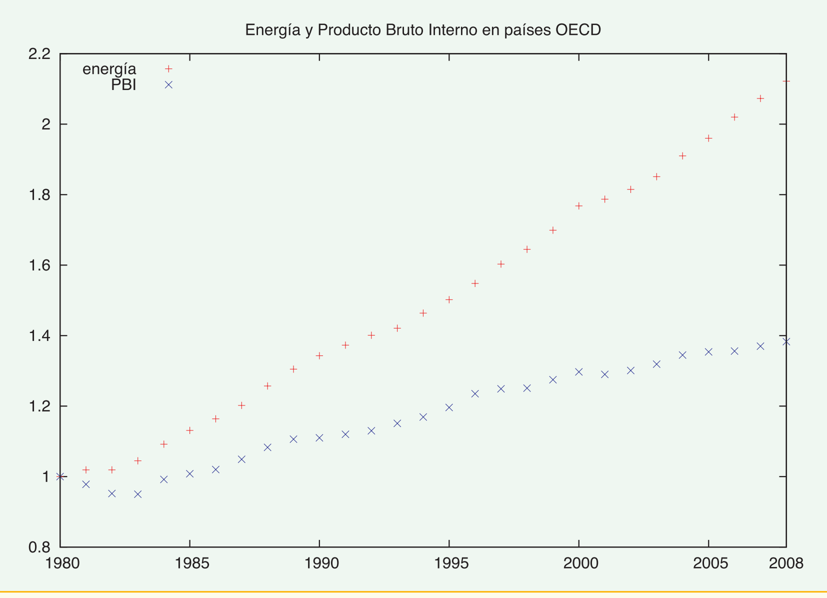


Figura 14.2. Gráfico de la evolución temporal del consumo de energía y del producto bruto interno de países del OECD.

En el gráfico de la figura 14.3 se muestra la evolución temporal de 1980 al 2008 del consumo de energía y del PBI para el conjunto de los países que no son miembros de la OECD; donde se toma como valor unidad los datos correspondientes al año 1980.

De los gráficos de las figuras 14.2 y 14.3 se desprende que la correlación entre el consumo total de energía y la actividad económica es distinta en los dos grupos de países. Se observa en el primer caso que las curvas más o menos siguen una relación lineal, pero con distinta pendiente cada una; siendo la pendiente de la producción

económica más acentuada. En el segundo caso, el de los países no miembros de la OECD, se observa que la producción económica y el consumo total de energía siguen prácticamente la misma evolución temporal.

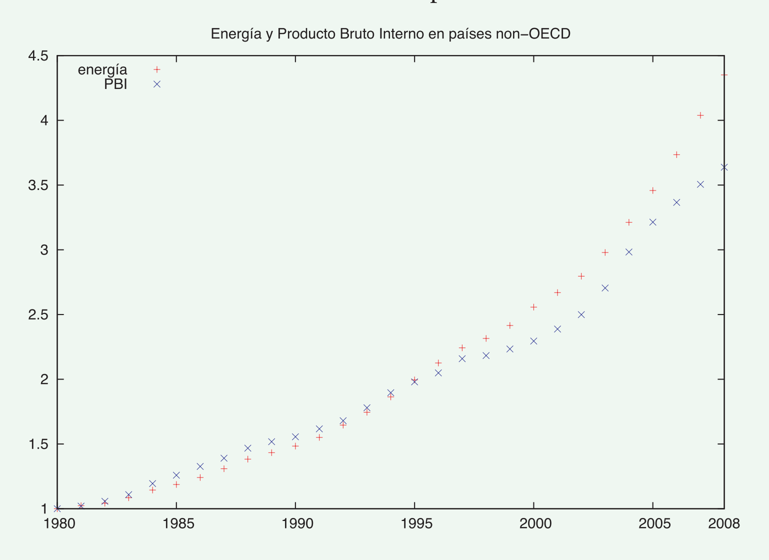


Figura 14.3. Gráfico de la evolución temporal del consumo de energía y del producto bruto interno de países no miembros del OECD.

Esta sencilla contrastación del consumo energético con la productividad económica podría entenderse como que en los países no miembros de la OECD el consumo de energía en la actividad económica está dirigida a la producción de materiales básicos, sin incidencia de valor agregado. En cambio, en los países de la OECD, el consumo de energía en la actividad económica está dirigido a la producción de materiales elaborados, con alta incidencia de valor agregado.

14.5. Otros aspectos de la energía en el contexto social

14.5.1. El tema de la eficiencia en general

Hemos visto que existe una correlación entre el consumo energético y la actividad económica de la sociedad, por lo que la eficiencia en la producción, transporte y procesos de consumo de la energía se tornan de importancia práctica.

Para dar un ejemplo, en la Argentina se está conscientizando de realizar un cambio de todas las fuentes de iluminación para pasar de las viejas lamparitas de filamento a las modernas lámparas de bajo consumo.

En países desarrollados, se toman fotografías aéreas en invierno que detectan la radiación térmica de las casas, y aplican multas a aquellos que descuidan las pérdidas excesivas.

Existen innumerables situaciones que están relacionados a la eficiencia del sistema energético, en particular, el cuidado de las posibles pérdidas. Por ejemplo, una instalación de cables antiguos en una casa vieja, puede ser la fuente de pérdidas de

energía eléctrica. La instalación de disyuntores puede ayudar a detectar la aparición de estos problemas.

14.5.2. La eficiencia en los sistemas de iluminación

¿A qué se denomina contaminación lumínica?

Se designa así a la emisión de luz directa o indirecta hacia la atmósfera de fuentes artificiales, en distintos rangos espectrales. Sus efectos manifiestos son: ***la dispersión hacia el cielo*** de la luz, ***intrusión lumínica***, ***deslumbramiento*** y el derroche de fuentes energéticas.
La luz proveniente de iluminación en exceso es dispersada en todas direcciones por las partículas presentes en el aire, produciendo una disminución de la oscuridad natural del cielo nocturno. Esto se conoce como dispersión hacia el cielo. Este proceso se hace más intenso si existen partículas contaminantes en la atmósfera (humos, partículas sólidas) o, simplemente, humedad ambiental. La expresión más evidente de esto es el característico halo luminoso que recubre las ciudades, visible a centenares de kilómetros según los casos, y las nubes refulgentes como fluorescentes.
La contaminación lumínica es una novedosa forma de contaminación, poco conocida y poco tenida en cuenta por la sociedad en general, pero cuyos efectos pueden ser equiparables a la emisión de humos a la atmósfera o al vertido de contaminantes en los ríos, algo que la sociedad ha asumido como un terrible ataque a la Naturaleza.

Interés en iluminación no contaminante en otros países; algunos ejemplos

- En mayo de 2002 se realizó la conferencia "Light Pollution and the Protection of the Night Environment", que se realizó en Venecia bajo los auspicios de la UNESCO. Los participantes de esta reunión pidieron a la UNESCO que se declare al cielo nocturno Patrimonio de la Humanidad. Respecto de la ciudad de Venecia, los participantes pidieron que el medio ambiente nocturno fuese considerado parte del patrimonio histórico, artístico y medio ambiental de la ciudad, y que fuese protegido y defendido. Ellos también pidieron que la iluminación externa, pública y privada, fuese planeada, diseñada y ejecutada adoptando las medidas más efectivas existentes para limitar los efectos de la contaminación lumínica y dando gran atención a la tradición en la elección de los niveles de iluminación.
- La región del Véneto, en Italia, ha sido la primera región que promulgó una ley específica en contra de la contaminación lumínica, la LR Nro. 22 del 27 de junio de 1997.
- El Decreto Supremo Nro. 686 del 7 de diciembre de 1998 del Ministerio de Economía, Fomento y Reconstrucción de Chile establece la Norma de Emisión para la Regulación de la Contaminación Lumínica.
- El Gobierno Español a propuesta del parlamento de las Islas Canarias aprobó el 31 de octubre de 1988 la Ley sobre Protección de la Calidad Astronómica de los Observatorios del Instituto de Astrofísica de Canarias.
- El 31 de mayo de 2001 se sancionó la Ley 6/2001 en Cataluña de ordenación ambiental del alumbrado para la protección del medio nocturno.
- La emisión de luz artificial al espacio es lo suficientemente importante para el mundo científico, como merecer la publicación "The Nights at mission concept"

de C.D. Eldvidge y colaboradores en International Journal of Remote Sensing, Vol. 28, Nro. 12, 20 June 2007, 2645-2670. En este artículo se propone una misión satelital específica para la detección de la luz artificial nocturna.

- En Tucson, Arizona, las autoridades de la región impidieron el desarrollo de un proyecto de 900 millones de dólares que hubiese aclarado los cielos y degradado las condiciones de observación de tres observatorios astronómicos de la zona. Science 22 January 1999: Vol. 283. no. 5401, p. 469
- La Agencia del Medio Ambiente del Reino Unido tiene una página sobre contaminación lumínica en: http://www.environment-agency.gov.uk/yourenv/efi/1190084/pollution/152227/

Beneficios de la iluminación no contaminante

Ahorro de energía. La deficiente iluminación de exteriores origina un desperdicio de energía de alrededor del 40%, aunque puede llegar al 50%, en su mayor parte consistente en luz contaminante.
El empleo de energía para luz que se derrocha implica contaminaciones secundarias, debido a las técnicas empleadas para la generación de energía.

Minimización de impacto sobre la salud humana. La disminución de la intrusión lumínica disminuye molestias, dificultades para dormir, estrés, etc.
El exceso de iluminación en el ambiente privado puede modificar el ritmo circadiano, producir cambios hormonales, anímicos y de conducta. La iluminación no contaminante minimiza estos efectos.
La disminución de la población de insectos, atraídos por las luces artificiales, minimiza su impacto en la salud humana.

Minimización de impacto sobre la vida silvestre. Aunque poco estudiados, hay efectos directos sobre la vida silvestre derivados del exceso en intensidad y rango espectral de la iluminación artificial. Aves, murciélagos, anfibios, peces, insectos, etc. ven alterados sus hábitos nocturnos por la presencia de luz artificial que alteran el ciclo natural del día y la noche.

Conservación del patrimonio universal. Cuando hablamos de patrimonio, no sólo se debe entender el patrimonio cultural cercano, tanto en tiempo como en espacio; se debiese también incluir el patrimonio planetario y el universal. Del patrimonio planetario se supone que no merece aclaración; pero:

¿qué se entiende por patrimonio universal?

Pues con este término deseamos incluir nuestra propia naturaleza y la del Universo.

Como ejemplo, nos podríamos preguntar:

¿qué cielo podían observar los antiguos pobladores de estas tierras?

Estamos en una zona privilegiada por la característica de los cielos, en particular

los nocturnos.
Se constituye así un patrimonio que beneficia a sus habitantes, a los turistas y a los profesionales de los observatorios astronómicos y aficionados.
Al minimizar el impacto que la iluminación artificial ejerce sobre nuestro cielo nocturno defendemos y cuidamos de nuestro patrimonio universal.

Derecho de las generaciones futuras. Preservar la oscuridad de la noche de acuerdo con la Declaración universal de los derechos de las generaciones futuras (UNESCO): "Las personas de las generaciones futuras tienen derecho a una Tierra indemne y no contaminada, incluyendo el derecho a un cielo puro".

Mejoramiento de la seguridad vial. La mala iluminación puede repercutir en la seguridad vial; un conductor o peatón deslumbrado nunca verá bien. Siempre se debe iluminar hacia el suelo, no hacia los ojos de la gente.

Descripción de iluminación no contaminante

A diferencia de otros tipos de contaminación, la debida a la luz desaparece cuando se corrigen las causas que la originan. Iluminar adecuadamente sólo produce beneficios y la inversión necesaria para ello se amortiza en pocos años debido al ahorro en electricidad que conlleva.
Algunas de las consideraciones a tener en cuenta para la iluminación de exteriores que disminuyan el impacto de contaminación lumínica son las siguientes:

- los proyectistas pueden optar por modelos de farolas con flujo al hemisferio superior nulo, por el uso de luminarias eficientes, de dispositivos reductores de flujo y con control horario;
- la intensidad de la iluminación, se debería ajustar al efecto deseado; evitándose intensidades excesivas e innecesarias;
- se debe limitar el espectro de emisión de las luces artificiales al espectro visible para el ojo humano (entre 350 y 760 nanómetros);
- se debería hacer un estudio sobre los horarios convenientes para la iluminación deseada evitando el uso de iluminación innecesaria.

En la figura 14.4 se muestra un esquema de iluminación contaminante y por lo tanto con exceso de gasto de energía, e iluminación no contaminante y por lo tanto más eficiente en el uso de la energía. En el primer caso mostrado en el lado izquierdo, se esquematiza una farola que ilumina hacia arriba provocando un desperdicio de al menos 50% de la energía usada. En el segundo caso mostrado en el lado derecho, se esquematiza una farola diseñada para enviar los rayos luminosos principalmente hacia abajo, aumentando así la intensidad de la iluminación, pues los rayos que irían hacia arriba son también detectados hacia abajo.
De esta forma se ve que un diseño apropiado de iluminación provee de ahorros de más del 50% de la energía empleada para la misma.

A modo de resumen sobre la iluminación no contaminante remarquemos que:

- la iluminación no contaminante *sólo provee beneficios*;
- el uso de la iluminación no contaminante *no es más cara*;
- la iluminación no contaminante *no implica una restricción en lo que se quiere iluminar*.

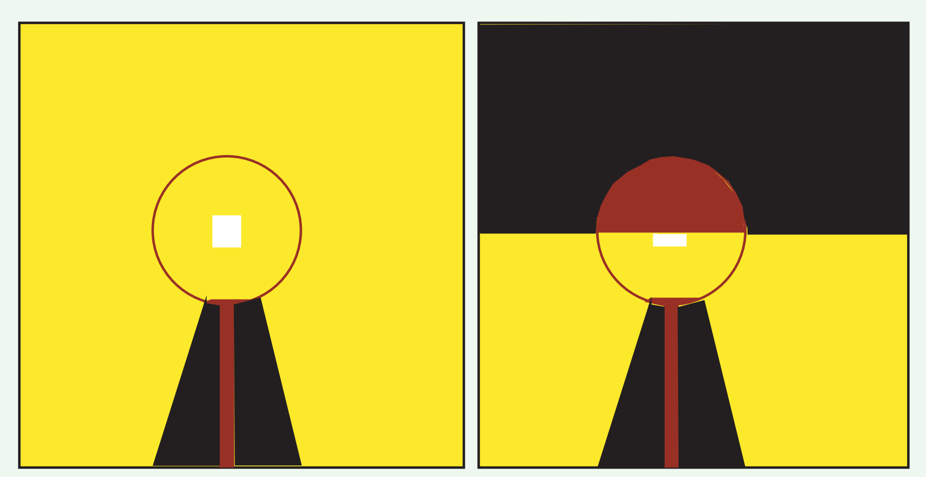


Figura 14.4.
Esquema de iluminación contaminante mostrada en el lado izquierdo e iluminación eficiente, mostrado en el lado derecho de farolas con forma esférica. Las zonas negras indican las partes no iluminadas por las fuentes; que están indicadas por rectángulos blancos.

14.5.3. La radiación solar como fuente de energía de las actividades agropecuarias

Cuando se calcula el balance energético de un país, sólo se toma en cuenta la energía producida por sistemas creados por el hombre. Sin embargo, para los cálculos de la incidencia en la actividad económica, también se debería tener en cuenta el uso de la radiación solar en las actividades económicas agropecuarias.
Esto podría tener incidencia en la forma en que entendemos las riquezas de un país. Por ejemplo, hay consenso en aceptar que los minerales, metales y petróleo que se encuentran en el país son parte de la riqueza del mismo y por lo tanto es natural que el gobierno aplique impuestos y regalías a diversas etapas de los procesos de producción y/o venta. Donde cabe destacar que a estos impuestos se los considera de una naturaleza independiente de por ejemplo el impuesto a las ganancias.
Similarmente se podría entender que los productores agropecuarios que hacen uso de grandes extensiones de superficie, no sólo están haciendo uso del humus, que debería ser considerado parte de la riqueza nacional, sino que también están accediendo al uso de la radiación solar, incidente en esa gran extensión de superficie, la cuál es esencial en los procesos biológicos de las plantas y los animales. Esta visión del aspecto energético los podría poner en igualdad conceptual respecto de las otras riquezas de un país.

Apéndice A

Sistema Internacional de Unidades

A.1. Definición de magnitudes fundamentales y unidades en el sistema SI

El Sistema Internacional de unidades (SI) es el que se usa ampliamente en la actualidad. Su definición se puede consultar en el enlace http://physics.nist.gov/cuu/Units/units.html

A.1.1. Magnitudes fundamentales

Tabla A.1. Magnitudes fundamentales y unidades correspondientes.

Magnitud	*Unidad*	*Símbolo*
tiempo	*segundo*	*s*
longitud	*metro*	*m*
masa	*kilogramo*	*kg*
corriente eléctrica	*ampere*	*A*
temperatura	*kelvin*	*K*
cantidad de moléculas	*mole*	*mol*
luminosidad	*candela*	*cd*

Las magnitudes fundamentales están expresadas en la tabla A.1.

A continuación se muestran las presentes definiciones de las unidades del sistema SI:

- **segundo:** el segundo es el lapso de tiempo de 9.192.631.770 períodos de la radiación correspondiente a la transición de dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.
- **metro:** el metro es la longitud del camino recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de 1/(299.792.458) segundos.
- **kilogramo:** el kilogramo es igual a la masa del kilogramo patrón.
- **ampere:** el ampere es la corriente que si mantenida en dos conductores derechos y paralelos, de infinita longitud, sección despreciable, y puestos a 1m de distancia en el vacío, produciría una fuerza entre ellos igual a 2×10^{-7}newton por metro de longitud.
- **kelvin:** el kelvin es la fracción 1/(273,16) de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
- **mole:** un mole es la cantidad de sustancia que contiene tantas partículas como átomos hay en 0,012 kg de carbono 12.
- **candela:** la candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente monocromática de radiación de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad de radiación en esa dirección de 1/683 watt por ángulo sólido.

A.1.2. Otras unidades usadas

Tabla A.2. Tabla de otras unidades para la energía.

Nombre	*Símbolo*	*Valor en J*
electrón-volt	*eV*	$1{,}602177 \times 10^{-19}$
kilowatt hora	*kWh*	$3{,}6 \times 10^{6}$
gigawatt hora	*GWh*	$3{,}6 \times 10^{12}$
kilotón de TNT	*(no tiene)*	$4{,}184 \times 10^{12}$
megatón de TNT	*(no tiene)*	$4{,}184 \times 10^{15}$

La unidad de energía es el joule con símbolo J y dado por $1J = 1newton \times m = kg\ m^2/s^2$ sin embargo en ocasiones se usan otras unidades para la energía, que mencionamos en la tabla A.2.

La unidad de potencia es el watt definido por $1W = 1\frac{J}{s} = kg\ m^2/s^3$; pero en ocasiones se usan otras unidades que mencionamos en la tabla A.3.

A.1.3. Constantes fundamentales

Algunas de las constantes fundamentales de la física están mencionadas en la tabla A.4.

Nombre	*Símbolo*	*Valor en W*
caballo de fuerza	*HP*	745,7
caballo vapor	*CV*	735

Tabla A.3. Tabla de otras unidades para la potencia.

Constante	*Símbolo*	*Valor*
velocidad máxima de las interacciones	c	$299.792.458\ m\ s^{-1}$
constante de la gravitación	G	$6,6742(10) \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$
constante de Planck	h	$6,620693(11) \times 10^{-34}\ Js$
tiempo de Planck	t_P	$5,39121(40) \times 10^{-44}\ s$
distancia de Planck	l_P	$1,61624(12) \times 10^{-35}\ m$
masa de Planck	m_P	$2,17645(16) \times 10^{-8}\ kg$
constante de Boltzmann	k_B	$1.3806505(24) \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
temperatura de Planck	T_P	$1,41679(11) \times 10^{32} K$
constante magnética $= 4\pi \times 10^{-7}\ N\ A^{-2}$	μ_0	$12,566370614... \times 10^{-7}\ N\ A^{-2}$
constante eléctrica $= \frac{1}{c^2\mu_0}$	ϵ_0	$8,854187817... \times 10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2}$
carga elemental	e	$1,602176487 \times 10^{-19}\ C$

Tabla A.4. Tabla de constantes universales.

A.1.4. Prefijos usuales

Factor	*Nombre*	*Símbolo*
10^{24}	*yotta*	*Y*
10^{21}	*zetta*	*Z*
10^{18}	*exa*	*E*
10^{15}	*peta*	*P*
10^{12}	*tera*	*T*
10^{9}	*giga*	*G*
10^{6}	*mega*	*M*
10^{3}	*kilo*	*k*
10^{2}	*hecto*	*h*
10^{1}	*deka*	*da*
10^{-1}	*deci*	*d*
10^{-2}	*centi*	*c*
10^{-3}	*mili*	*m*
10^{-6}	*micro*	μ
10^{-9}	*nano*	*n*
10^{-12}	*pico*	*p*
10^{-15}	*femto*	*f*
10^{-18}	*atto*	*a*
10^{-21}	*zepto*	*z*
10^{-24}	*yocto*	*y*

Tabla A.5:
Prefijos usados en el sistema SI, que se puede consultar en el enlace:
http://physics.nist.gov/cuu/Units/prefixes.html

Apéndice B

Sistemas de coordenadas cartesianas y polares

B.1. Sistema cartesiano y polar en dos dimensiones

En dos dimensiones podemos usar las coordenadas cartesianas (x, y) para determinar la posición de un punto p en el plano.

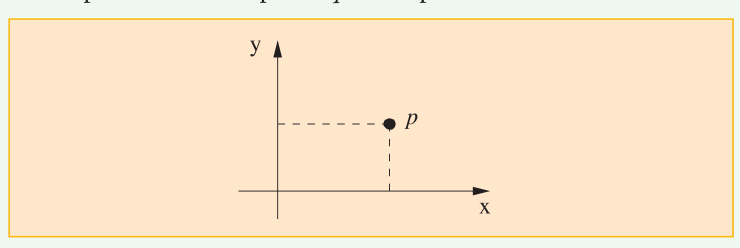


Figura B.1. Sistema cartesiano en dos dimensiones.

Por otro lado también se puede hacer uso del sistema de coordenadas polares (r, ϕ) para determinar la posición de un punto p en el plano, según muestra la figura B.2. La coordenada r es la distancia del origen del sistema de coordenadas al punto p; mientras que ϕ es el ángulo entre la línea que va del origen a p con el eje x.
Por consideraciones geométricas básicas, vemos que la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) del punto p con las coordenadas polares (r, ϕ) del mismo punto son

$$x = r\,cos(\phi), \qquad (B.1)$$

$$y = r\,sen(\phi), \qquad (B.2)$$

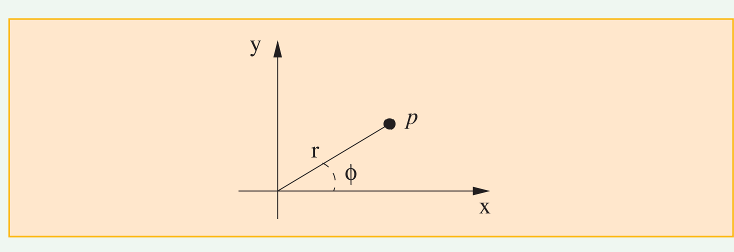


Figura B.2. Sistema cartesiano polar en dos dimensiones.

De donde también se deducen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (B.3)$$

$$\phi = arctan\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (B.4)$$

B.1.1. Sistema cartesiano y polar en tres dimensiones

En tres dimensiones es natural usar un sistema de coordenadas cartesianas; esto es un sistema basado en tres ejes ortogonales entre ellos.

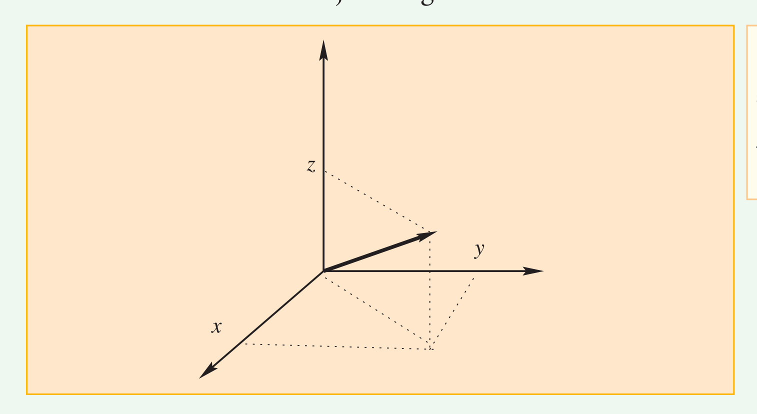


Figura B.3.
Las proyecciones sobre los tres ejes perpendiculares se toman como sistema de coordenadas.

En ocasiones puede ser más útil usar un sistema de coordenadas esféricas como se indica en la figura B.4
Las relaciones entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) del punto p con las coordenadas polares (r, θ, φ) del mismo punto son

$$x = r\ sen(\theta)\ cos(\varphi), \tag{B.5}$$

$$y = r\ sen(\theta)\ sen(\varphi), \tag{B.6}$$

$$z = r\ cos(\theta). \tag{B.7}$$

De donde también se deducen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{B.8}$$

$$\theta = arc\ cos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \tag{B.9}$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{B.10}$$

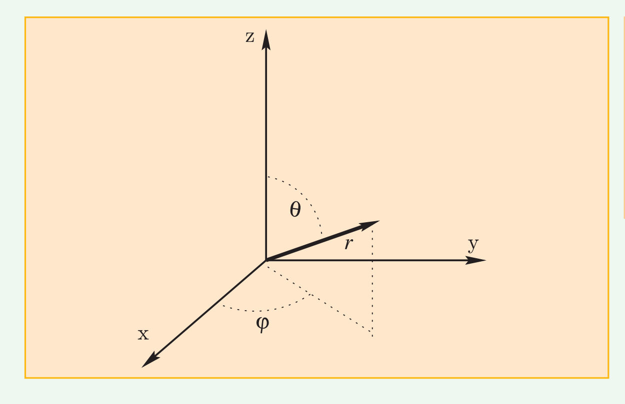


Figura B.4.
El módulo r del vector posición, el ángulo θ con el eje z y el ángulo φ de la proyección del vector posición sobre el plano xy que forma con el eje x, definen un sistema de coordenadas esféricas.

Apéndice C

Tasas de variación medias e instantáneas

C.1. Tasas de variaciones medias

En consideraciones físicas es frecuente encontrarse con conceptos que involucran tasas de variación de dos magnitudes. Por ejemplo, la noción de velocidad media v_m de una partícula que se mueve a lo largo del eje x, entre los puntos x_1 y x_2, se define como la tasa de variación

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}; \qquad (C.1)$$

donde t_1 y t_2 son los tiempos en que la partícula pasa por las posiciones x_1 y x_2 respectivamente. En este caso estamos considerando a la posición x como función del tiempo t.

En general para una función $f(x)$ se define la tasa de variación entre el punto 1 y 2 como la relación

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}; \qquad (C.2)$$

donde se está usando que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Gráficamente esto se puede observar en la figura C.1

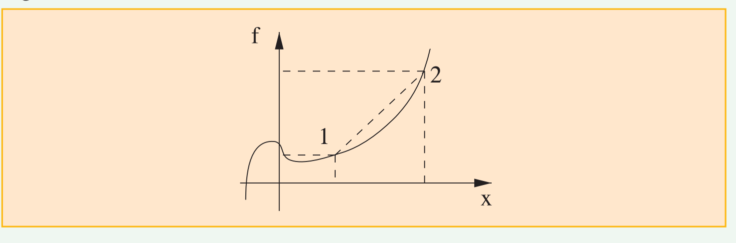


Figura C.1. Tasa de variación de la función f en término de la variable x entre los puntos 1 y 2.

C.2. Tasas de variaciones instantáneas

Si fijamos x_1 y consideramos Δx cada vez más pequeño, se llega a la noción de tasa de variación instantáneas; que matemáticamente se la llama *derivada*.

Vemos entonces que la tasa de variación instantánea, o derivada, en el punto x_1, tiene el significado geométrico de la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $f(x_1)$ con el eje horizontal x.

Cuando estemos en presencia de tasas de variación instantánea usaremos indistinta-

mente la notación Δf o df para el incremento de funciones y Δx o dx para el incremento de la variable independiente x.

C.2.1. Ejemplo de la función lineal

En particular si $f(x)$ fuese una recta; o sea, si fuese de la forma $f(x) = ax + b$, entonces la variación instantánea o derivada sería

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = a; \qquad (C.3)$$

que es independiente de la posición; dado que la recta forma siempre el mismo ángulo con el eje x; esto es, para todo x.
Implícito en este ejemplo está la siguiente propiedad: "Si la derivada de la función f es la función $g(x)$; entonces la derivada de la función f más una constante c también es la función g; esto es: $\frac{d(f+c)}{dx} = \frac{d(f)}{dx} = g$".

Además se puede ver que si c es una constante, entonces la derivada de la función cf es c por la derivada de la función f, o sea $\frac{d(cf)}{dx} = c\,\frac{d(f)}{dx}$.

C.2.2. Ejemplo de la función potencia de *x*

Veamos un ejemplo importante; consideremos el caso en que la función f es una potencia de x; más precisamente consideremos $f(x) = x^n$. Luego la tasa de variación está dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x + \Delta x)^n - (x)^n}{\Delta x} \\ &= \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \text{otros términos que involucran } (\Delta x)^q \text{ con } q \geq 2) - x^n}{\Delta x} \\ &= nx^{n-1} + \text{otros términos que involucran } (\Delta x)^q \text{ con } q \geq 1. \qquad (C.4)\end{aligned}$$

Vemos entonces que, en este caso, la tasa de variación instantánea, o derivada, que se consigue en el límite cuando consideramos Δx tendiendo a cero, está dada por:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}; \qquad (C.5)$$

donde estamos usando la notación matemática para la derivada. A dx se lo llama *diferencial de x* y a df se lo llama *diferencial de la función f*.

C.2.3. Ejemplo de las funciones seno y coseno de x

La función trigonométrica seno de x, sen(x), se puede representar como una serie de potencias de la siguiente manera

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (C.6)$$

donde estamos usando la notación de factorial; esto es,
$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \ldots\ 3 \times 2 \times 1$ y k son enteros que comienzan desde cero. Por otro lado, la función trigonométrica coseno de x, $\cos(x)$, se puede representar como la siguiente serie de potencias

$$cos\,(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (C.7)$$

donde k son enteros que comienzan desde cero.
Veamos que sucede cuando calculamos la variación instantánea (derivada) de la función sen(x). Para ello basta calcular la derivada de $(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Notamos que

$$\frac{d\left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)}{dx} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{dx^{2k+1}}{dx} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)\,x^{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (C.8)$$

que coincide con la expresión de la serie de potencias que da el coseno de x. Por lo que concluimos que

$$\frac{d\,sen(x)}{dx} = cos\,(x). \qquad (C.9)$$

Por otro lado, si calculamos la derivada del coseno de x ; encontramos que:

$$\frac{d\left((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)}{dx} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{dx^{2k}}{dx} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2k)\,x^{2k-1} = -\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}; \qquad (C.10)$$

donde es importante notar que k en esta expresión comienza desde el valor 1; dado que la derivada del primer término da cero. Esto indica la conveniencia de definir el índice j que sea igual a (k -1); dado que entonces la expresión anterior nos queda

$$-\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = -\frac{(-1)^j}{(2(j+1)-1)!}x^{2(j+1)-1} = -\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}x^{2j+1}; \qquad (C.11)$$

con j enteros que comienzan desde cero. Esta coincide con 'menos' la expresión que da el seno de x ; por lo que concluimos que la derivada del coseno es menos el seno; o sea:

$$\frac{d\,cos(x)}{dx} = -sen\,(x). \qquad (C.12)$$

C.2.4. Reglas de Leibniz

Muchos otros ejemplos se puede deducir de las siguientes reglas, conocidas como reglas de Leibniz.
Si f y g son funciones que tienen derivada, entonces:

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{d(f)}{dx} + \frac{d(g)}{dx}, \qquad (C.13)$$

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f)}{dx}g + f\frac{d(g)}{dx}, \qquad (C.14)$$

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{d(f)}{dx}\frac{1}{g} - \frac{f}{g^2}\frac{d(g)}{dx}. \qquad (C.15)$$

C.2.5. El caso de la composición de funciones

Supongamos el caso en que tenemos una función $f(x)$, pero que a su vez x es función de la variable t; luego se tiene $f(x(t))$. La derivada de f respecto de t está dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}. \qquad (C.16)$$

C.3. Sobre la velocidad y la aceleración

La velocidad media entre los puntos x_1 y x_2 está dada por la expresión (C.1). Similarmente, la aceleración media para una partícula que se mueve a lo largo del eje x está dada por:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}; \qquad (C.17)$$

donde t_1 y t_2 son los tiempos en que la partícula pasa por las posiciones x_1 y x_2 respectivamente.
En el límite en que se considera t_2 cada vez más cerca de t_1 se obtiene la tasa de variación instantánea, o derivada, por lo que en este caso se tiene:

$$a = \frac{dv}{dt}; \qquad (C.18)$$

pero como la velocidad instantánea es a su vez la derivada de la posición respecto del tiempo

$$v = \frac{dx}{dt}; \qquad (C.19)$$

se tiene

$$a = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}; \qquad (C.20)$$

que se simboliza con

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad (C.21)$$

y se dice que la aceleración es la *derivada segunda* de la posición respecto del tiempo.

Apéndice

D

Solución de ejercicios

En lo posible se usará una precisión de cinco cifras significativas; de tal forma que, por ejemplo, el número exacto 1/6 se representará por sus primeras cinco cifras significativas 0,16667.
Usamos el valor nominal de la aceleración de la gravedad g dado por $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Capítulo1

- **Solución 1.1**
  En este sistema la energía es constante y se puede calcular con los datos del ejercicio de la ecuación (1.10). Debido a que la energía es suma de energía cinética y energía potencial, se concluye que la energía cinética y por ende v^2 será máxima cuando la energía potencial sea mínima; por lo que la velocidad v máxima se calcula evaluando $x = l_o$ en la ecuación (1.11).

- **Solución 1.2**
  Podemos hacer uso de la ecuación (1.17) para el caso en que no hay movimiento en la dirección x por lo que se tiene:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgy = \frac{1}{2}MV_{y0}^2 + M\,g\,y_0. \qquad (D.1)$$

  Los datos del ejercicio indican que M = 0,250 kg, $Vy_0 = 0$ e $y_0 = 30$ m; dado que la velocidad inicial es cero.
  Cuando llega al suelo, se tiene $y = 0$ por lo que

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 = M\,g\,y_0; \qquad (D.2)$$

  que es directamente la expresión para la energía cinética $\mathcal{E}$; por lo que se tiene:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Mv^2 = Mgy_0 = 0{,}250\ kg\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ 30\ m = 73{,}5\ J. \qquad (D.3)$$

  Además, usando la misma ecuación, vemos que el módulo de la velocidad está dado por

$$v = \sqrt{2g\,y_0} = 24{,}249\ \frac{m}{s}. \qquad (D.4)$$

- **Solución 1.3**
  Los datos del ejercicio indican que $M = 0{,}008\ kg$, $Vx_0 = 305\ \frac{m}{s}$, $Vy_0 = 0$ e $y_0 = 0\ m$; donde estamos tomando la altura de referencia respecto de la posición de la pistola.
  Las ecuaciones que describen el movimiento; esto es, las ecuaciones (1.12), (1.13), (1.14) y (1.15) están expresadas como funciones del tiempo; por lo que debemos

calcular el tiempo t_{20} que emplea la bala en recorrer 20 m horizontalmente. Considerando la ecuación (1.12) con $x_0 = 0$ se obtiene:

$$t_{20} = \frac{x\,(t_{20})}{V_{x_0}} = \frac{20\ m}{305\,\frac{m}{s}} = 0{,}065574\ s. \qquad (D.5)$$

Luego, de la ecuación (1.13) se obtiene

$$y\,(t_{20}) = y_0 + t_{20}\,V_{y_0} - \frac{1}{2}g\,t_{20}^2 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x(t_{20})}{V_{x_0}}\right)^2 = -0{,}021070\ \text{m}; \qquad (D.6)$$

que es la cantidad que desciende el proyectil cuando ha viajado 20 m horizontalmente.

En ese momento su energía cinética vale

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Mv(t_{20})^2 = \frac{1}{2}M(V_x\,(t_{20})^2 + V_y\,(t_{20})^2) = \frac{1}{2}M(V_{x_0}^2 + (g\,t_{20})^2)$$

$$= \frac{1}{2}0{,}008\ kg\left((305\frac{m}{s})^2 + (9.8\,\frac{m}{s^2}\,\frac{20m}{305\frac{m}{s}})^2\right) = 372{,}10\ J. \qquad (D.7)$$

Queda claro de esta expresión que la contribución a la energía cinética debido a la velocidad en la dirección x es constante; por lo que cualquier otra contribución debida al movimiento en la dirección y provocará que la energía cinética aumente respecto de su valor original.

- **Solución 1.4**

a) El equilibrio corresponde a la situación en que la fuerza ejercida por el resorte contrarreste la fuerza debida al peso del cuerpo. Para discutir esto tomemos inicialmente una coordenada vertical y' que tiene origen en el punto de sujeción del resorte en el techo y crece hacia abajo, de tal forma que la ecuación de movimiento de Newton se escribe:

$$Ma' = -k\,(y' - l_0) + Mg. \qquad (D.8)$$

Notar que con esta elección cuando $y' = l_0$, la fuerza ejercida por el resorte es cero; mientras que cuando $y' = 0$ el resorte ejerce una fuerza hacia abajo; en la misma dirección que el peso.

La situación de equilibrio es entonces

$$y'_0 = \frac{M}{k}g + l_0; \qquad (D.9)$$

que coincide con la longitud del resorte en la situación de equilibrio.

b) Definamos ahora la coordenada vertical y con origen en la posición de equilibrio y apuntando hacia arriba; por lo que se tiene:

$$y = \frac{M}{k}g + l_0 - y'. \qquad (D.10)$$

b1) La ecuación de movimiento, escrita respecto de este sistema de coordenadas, se puede deducir de (D.8), realizando las substituciones:
$a' \rightarrow -a'$ e $y' \rightarrow \frac{M}{k}g + l_0 - y$; de donde se obtiene

$$-Ma = -k\,(\frac{M}{k}g - y) + Mg = ky, \qquad \textit{(D.11)}$$

o equivalentemente:

$$Ma = -ky. \qquad \textit{(D.12)}$$

b2) Matemáticamente, esta ecuación coincide con (1.2) por lo que la forma funcional de su solución también coinciden. De aquí deducimos que la solución general para este movimiento es de la forma

$$y(t) = A\,cos(\omega t + \phi); \quad \textit{(D.13)} \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad \textit{(D.14)}$$

b3) Las otras constantes deben ser ajustadas con los datos de las condiciones iniciales del movimiento. Los datos indican que la posición inicial y_0 está dada por y_0 = 0,05 m y que su velocidad inicial es cero. La velocidad está dada por:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \phi); \qquad \textit{(D.15)}$$

por lo que evaluado en $t = 0$ se tiene

$$v_y(0) = \frac{dy}{dt} = -\omega A sen(\phi) = 0; \qquad \textit{(D.16)}$$

lo que indica que $\phi = 0$. Luego se debe tener

$$y(0) = A = y_0 = 0{,}05\ m; \qquad \textit{(D.17)}$$

lo que fija el valor de A; o sea

$$y(t) = 0{,}05\ m\ cos\,(\sqrt{\frac{k}{M}}t). \qquad \textit{(D.18)}$$

b4) Se obtiene de la aplicación de la ecuación (1.10).

- **Solución 1.5**

La ecuación (1.31) nos indica que

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{2j}{p}\right)^2(e^2 - 1) = \frac{1}{2}m\left(\frac{4j^2}{p^2}\right)(e^2 - 1). \qquad \textit{(D.19)}$$

Por otro lado de la ecuación (1.24) se tiene

$$4j^2 = pGM; \qquad \textit{(D.20)}$$

por lo que se obtiene

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{p}\right)(e^2 - 1). \qquad \textit{(D.21)}$$

Finalmente de la ecuación (1.32) se obtiene

$$E = -\frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{a}\right); \qquad \textit{(D.22)}$$

que también se puede expresar por

$$a = -\frac{GmM}{2E}. \qquad \textit{(D.23)}$$

- **Solución 1.6**
  a) Asumiendo el volumen V de un cuerpo esférico de radio r = 130/2 m y una densidad ρ que coincide con la del agua; esto es $\rho = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, la masa m del cuerpo se calcula, entonces así:

$$m = \rho V = 1.000 \frac{kg}{m^3} \frac{4\pi}{3} r^3 = 1.000 \frac{kg}{m^3} \frac{4\pi}{3} (65)^3 \, m^3 = 1{,}1503 \times 10^9 \, kg. \qquad (D.24)$$

  c) La energía mecánica total del cuerpo está dada por (D.22); por lo que

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \, 1{,}1503 \times 10^9 \, kg \left(\frac{6{,}6742 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \, 1{,}99 \times 10^{30} \, kg}{1{,}72647 \times 1{,}495979 \times 10^{11} \, m} \right) \\ &= -2{,}9577 \times 10^{17} \, J. \end{aligned} \qquad (D.25)$$

  b) La energía de un cuerpo bajo la influencia de un objeto gravitatorio central está dada por la expresión (1.31); esto es

$$E = \mathcal{E} + U = \frac{1}{2} mv^2 - G\frac{mM}{r}; \qquad (D.26)$$

  que para el caso de un objeto que esté en (o cruce) la órbita terrestre, se debe usar r = 1u.a.; por lo que su energía cinética está dada por

$$\mathcal{E} = E - U = E + G\frac{mM}{r}. \qquad (D.27)$$

  Aquí conviene notar que

$$G\frac{mM}{r} = -2E\frac{a}{r}; \qquad (D.28)$$

  por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= E + G\frac{mM}{s} = E\left(1 - \frac{2a}{r}\right) = -2{,}9577 \times 10^{17} \text{ J } (1 - 2 \times 1{,}72647) \\ &= 7{,}2550 \times 10^{17} \text{ J}. \end{aligned} \qquad (D.29)$$

  Se debe remarcar que esta es la energía cinética medida respecto de un sistema de coordenadas planetario con centro en el Sol. Para calcular la energía cinética medida respecto de la Tierra se debe, por supuesto, incluir el movimiento de la misma.
  Esta energía cinética expresada en megatones de TNT es

$$\mathcal{E} = \frac{7{,}2550 \times 10^{17}}{4{,}184 \times 10^{15}} \, megatones\ TNT = 173{,}4 \ megatones\ TNT. \qquad (D.30)$$

Capítulo 2

- **Solución 2.1**
  El trabajo hecho por la tensión T está dado por

$$\Delta W = T\,(y_2 - y_1) = mgh. \qquad (D.31)$$

- **Solución 2.2**
  Sea m la masa del auto; del teorema del trabajo-energía se tiene que

$$W_{ab} = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2. \qquad (D.32)$$

El trabajo hecho por la fuerza de frenado es

$$W_{ab} = -50.000\ N\, 7m = -3{,}5 \times 10^5\,\text{J}. \qquad (D.33)$$

Luego se tiene

$$v_b = \sqrt{\frac{2}{m} W_{ab} + v_a^2} = \sqrt{-\frac{2 \times 3{,}5 \times 10^5}{1.000} + \left(\frac{120 \times 1.000}{60 \times 60}\right)^2}\ \frac{m}{s}$$

$$= 20{,}276 \frac{m}{s} = 72{,}993 \frac{km}{h}. \qquad (D.34)$$

Capítulo 3

- **Solución 3.1**

De la ecuación (3.13) se tiene que

$$v_c = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3}{mN} PV} = \sqrt{\frac{3}{0{,}032\ kg} 101.325 \frac{N}{m^2} m^3} = 3082{,}1 \frac{m}{s}. \qquad (D.35)$$

Este resultado parece involucrar velocidades relativamente altas. Uno se puede preguntar: ¿corresponde esta cuenta a lo que sucede en la atmósfera a temperatura ambiente? En realidad se puede ver que a temperatura ambiente, en un metro cúbico de aire, a una atmósfera de presión, se deben encontrar aproximadamente 40 moles; por lo que el valor de la velocidad cuadrática media típica resultaría menor.

Capítulo 4

- **Solución 4.1**

De la ecuación (4.7) se tiene que

$$N = \frac{PV}{k_B T} = \frac{101.325 \frac{N}{m^2} m^3}{1{,}3806504 \times 10^{-23} \frac{J}{K}\, 293{,}03\ K} = 2{,}5045 \times 10^{25}; \qquad (D.36)$$

que corresponde a un número n de moles dado por

$$n = \frac{N}{N_A} = 41{,}588\ moles. \qquad (D.37)$$

La velocidad cuadrática media para este caso se puede obtener del resultado del ejercicio 3.1 dividiendo por la raíz cuadrada de n, de donde se tiene

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{n}} 3082{,}1 \frac{m}{s} = 477{,}93 \frac{m}{s}. \qquad (D.38)$$

Capítulo 5

- **Solución 5.1**

La superficie del Sol es entonces $A = 4\pi r^2$. Por lo que el Sol emite por segundo la cantidad de energía E_1 dada por $E_1 = A \times \mathcal{P}_N(T) \times 1\text{s}$.

Consideremos la esfera centrada en el Sol de radio 1ua; la cantidad de energía en forma de radiación que fluye por esta esfera hacia afuera por segundo debe ser también E_1, pero la energía radiante $\mathcal{I}$ que incide sobre la superficie exterior terrestre será mucho menor debido a la relación entre las superficies; más específicamente se tiene

$$\mathcal{I} = \frac{r^2}{ua^2}\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(T) = \left(\frac{r}{ua}\right)^2 \sigma T^4 = 1.365\,\frac{W}{m^2} \qquad (D.29)$$

Se denomina constante solar a la cantidad de energía electromagnética proveniente del Sol que se mide por unidad de área y unidad de tiempo en las capas exteriores de la atmósfera terrestre; cuyo valor observado es 1366,1 W/m^2.

El espectro y la energía electromagnética que recibe la Tierra en su superficie son alteradas por una serie de efectos como por ejemplo: variación de la distancia Tierra-Sol durante el año, absorción atmosférica, dispersión atmosférica, latitud y fecha de la observación, clima, etc.

Capítulo 6

- **Solución 6.1**

Para probar esto asumamos que existe un motor irreversible que produce más trabajo que el motor reversible. A continuación combinemos los dos ciclos, de tal forma de tener una situación como muestra la figura 6.20. El sistema combinado cancela el intercambio de calor con el reservorio a temperatura T_2. Luego, debido a que se asume que $W' > W$, se deduce que $Q'_1 < Q_1$; por lo que el sistema combinado absorbe calor del reservorio a temperatura T_1 y produce un trabajo positivo, lo que contradice el enunciado de Kelvin-Planck. Concluimos que un motor irreversible no puede tener mayor eficiencia que un motor reversible operando entre los mismos reservorios.

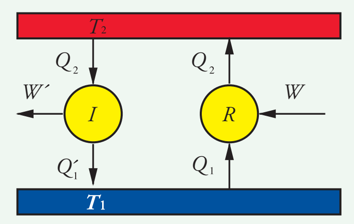


Figura 6.20.
Combinación de un ciclo irreversible de mayor eficiencia que un ciclo reversible.

- **Solución 6.2**

La prueba de **R 6.3** sigue la misma lógica que la prueba de **R 6.2.** Si asumimos que existe un motor reversible con mayor eficiencia que el motor de Carnot inmediatamente se concluye que se viola el enunciado de Kelvin-Planck.

Capítulo 7

- **Solución 7.1**

La velocidad más probable se calcula de la ecuación (7.9) donde para la masa m de la molécula usamos

$$m = \frac{0{,}032\ kg}{N_A}; \qquad (D.39)$$

por lo que

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{2N_A k_B T}{0{,}032\ kg}} = \sqrt{\frac{2RT}{0{,}032\ kg}} = \sqrt{\frac{2 \times 8{,}314472 \frac{J}{mol\,K} 293{,}03\ K}{0{,}032\ kg}}$$

$$= 390{,}22 \frac{m}{s}. \qquad (D.40)$$

- **Solución 7.2**
La longitud de onda λ_m con que irradia una superficie a una temperatura de 20 °C, o sea T = 293,03 K está dada por

$$\lambda_m = 0{,}0028976\ m \frac{1}{293{,}03} = 9{,}8884 \times 10^{-6}\ m. \qquad (D.41)$$

Esto corresponde a longitudes de onda más de diez veces la longitud de onda correspondiente al rojo; por lo que está en el infrarrojo.

- **Solución 7.3**
Por un lado se tiene que la presión para el gas de fotones se la puede expresar por

$$P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}. \qquad (D.42)$$

Además se tiene que

$$\mathcal{E}_r = \frac{U}{V} = aT^4; \qquad (D.43)$$

por lo que en definitiva, la presión está dada por

$$P = \frac{a}{3}T^4; \qquad (D.44)$$

pero como tenemos la expresión de la constante σ de Stefan-Boltzmann dada por $a = \frac{4\sigma}{c}$ se tiene

$$P = \frac{4\sigma}{3c}T^4 = \frac{4 \times 5{,}6704 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}}{3 \times 299792458 \frac{m}{s}} (293{,}03)^4 K^4 = 1{,}8594 \times 10^{-6}\ Pa. \qquad (D.45)$$

- **Solución 7.4**
Debido a que el dato está expresado en término de la temperatura podemos emplear una de las ecuaciones usadas en la solución del ejercicio anterior, de donde se obtiene

$$U = aVT^4 = \frac{4\sigma}{c}VT^4 = \frac{4 \times 5{,}6704 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}}{299792458 \frac{m}{s}} (3 \times 4 \times 3)\ m^3\,(293{,}03)^4 K^4$$

$$= 2{,}0082 \times 10^{-4} J. \qquad (D.46)$$

Capítulo 8

- **Solución 8.1**
De acuerdo con la ecuación (8.52) la masa en primera aproximación, está dada por

$$m = 2m_1 + \frac{1}{2c^2}k\Delta x^2; \qquad (D.47)$$

donde $m_1 = 1\text{kg}$, y el segundo término vale

$$\frac{1}{2c^2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2(299792458)^2 \frac{m^2}{s^2}}\frac{N}{m}(0,2)^2\, m^2 = 2,2253 \times 10^{-19}\, kg. \qquad (D.48)$$

Por lo tanto la balanza debe tener una precisión de 20 cifras significativas; para que pueda medir variaciones sobre 2 kg de 10^{-19} kg.

- **Solución 8.2**

Tenemos la relación entre masa y energía dada por

$$E = mc^2; \qquad (D.49)$$

donde $m = 1\text{kg}$. La energía disponible es la correspondiente a un gas de fotones termalizado; cuya energía interna está dada por

$$U = aVT^4 = \frac{4\sigma}{c}VT^4. \qquad (D.50)$$

Por lo que la temperatura está dada por

$$mc^2 = \frac{4\sigma}{c}VT^4; \qquad (D.51)$$

o equivalentemente

$$T = \sqrt[4]{\frac{c^3}{4\sigma}\frac{m}{V}} = \sqrt[4]{\frac{(299792458)^3 \frac{m^3}{s^3}}{4 \times 5,6704 \times 10^{-8}\frac{W}{m^2 K^4}} \frac{1\, kg}{10^9 m^3}} = 587.080\, K. \qquad (D.52)$$

Capítulo 9

- **Solución 9.1**

La serie de Balmer está dada por

$$\frac{1}{\lambda_{2,n}} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (D.53)$$

Mientras que el espectro de energías del átomo de hidrógeno es

$$E = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}. \qquad (D.54)$$

Luego, una transición de un nivel $n > 2$ al nivel 2 provocará una emisión de un fotón con energía

$$\frac{hc}{\lambda_{2,n}} = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} - \left(-\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2 2^2}\right) = \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad (D.55)$$

de donde se deduce que

$$R_H = \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 10.973.731\frac{1}{m}. \qquad (D.56)$$

- **Solución 9.2**

La energía de un fotón expresada en término de su longitud de onda es

$$E = \frac{hc}{\lambda}; \qquad (D.57)$$

que debe ser igual a $-E_0 = 2{,}17 \times 10^{-18}$ J; por lo que se debe tener

$$\lambda = \frac{hc}{-E_0} = \frac{6{,}6260693 \times 10^{-34} \times 299792458}{2{,}17 \times 10^{-18}}\ m = 9{,}15 \times 10^{-8}\ m. \qquad (D.58)$$

Esta corresponde a una longitud de onda menor que las del espectro visible; por lo que está en el ultravioleta.

- **Solución 9.3**

La resistencia está dada por la ecuación

$$R = \frac{L}{\sigma s} = \frac{5m}{5{,}8 \times 10^{7}\frac{1}{\Omega m}10^{-6}m^2} = 8{,}6 \times 10^{-2}\,\Omega. \qquad (D.59)$$

- **Solución 9.4**

Comenzamos por aplicar la ley de Ohm para calcular la corriente I, obteniéndose

$$I = \frac{V}{R}; \qquad (D.60)$$

donde el voltaje V es dato del problema; esto es $V = 0{,}05$V. Mientras que la resistencia R debe ser calculada; similarmente a lo realizado en el ejercicio anterior. En este caso se tiene

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{L}}{\sigma \mathrm{s}} = \frac{2{,}5\ m}{5{,}8 \times 10^{7}\frac{1}{\Omega m}10^{-6}m^2} = 4{,}3 \times 10^{-2}\,\Omega. \qquad (D.61)$$

Luego, la corriente I tiene el valor

$$I = \frac{0{,}05V}{4{,}3 \times 10^{-2}\Omega} = 1{,}16A = 1{,}16\frac{C}{s}. \qquad (D.62)$$

Como la carga de un electrón es $e = 1{,}602176487 \times 10^{-19}$ C, se tiene que el número de electrones n que pasa por segundo una sección del cable es

$$n = \frac{I}{e} = \frac{1{,}16\frac{C}{s}}{1{,}602176487 \times 10^{-19}\ C} = 7{,}26 \times 10^{18}\frac{1}{\mathrm{s}}. \qquad (D.63)$$

Capítulo 10

- **Solución 10.1**

La recomendacion para la solucion del ejercicio es no calcular el tiempo total, sino sólo la diferencia respecto del tiempo de referencia. Esto es, si llamamos t_F al medido por el reloj atómico de FaMAF y t_A y t_J los tiempos medidos por Alberto y Jaimito respectivamente, se pueden expresar por

$$t_A = t_F + \delta t_A \ \text{ y } \ t_J = t_F + \delta t_J.$$

- **Solución 10.2**

La ecuación a probar es

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}; \qquad (D.64)$$

donde $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = g\,h$. Se debe usar la ecuación (10.18), que podemos reexpresar por

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}}}. \qquad (D.65)$$

Primeramente hacemos uso de la aproximación

$$\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}} \approx \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}\right)\left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r_1}\right) = \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r_1} - \frac{2Gm}{c^2 r_2}\right) + O(\frac{1}{r^2}); \qquad (D.66)$$

donde el símbolo en el último término indica factores $\frac{1}{r^n}$ con n mayor o igual que 2; por lo que se despreciarán dichos términos, dado que estamos asumiendo que $\frac{2Gm}{c^2 r}$ es mucho menor que 1, para cualquiera de los r.

En la segunda aproximación usamos que

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r_1} - \frac{2Gm}{c^2 r_2}\right)} \approx 1 + \frac{2Gm}{c^2 r_1} - \frac{2Gm}{c^2 r_2}. \qquad (D.67)$$

Finalmente expresemos $r_2 = r_1 + h$, de donde se obtiene

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} \approx 1 + \frac{Gm}{c^2 r_1} - \frac{Gm}{c^2 (r_1 + h)} = 1 + \frac{Gm}{c^2 r_1}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{h}{r_1})}\right)$$

$$= 1 + \frac{Gm}{c^2 r_1}\left(\frac{\frac{h}{r_1}}{(1+\frac{h}{r_1})}\right). \qquad (D.68)$$

Aquí usamos nuevamente la aproximación

$$\frac{\frac{h}{r_1}}{(1+\frac{h}{r_1})} \approx \frac{h}{r_1}(1 - \frac{h}{r_1}) \approx \frac{h}{r_1}; \qquad (D.69)$$

de donde se obtiene

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} \approx 1 + \frac{Gm}{c^2 r_1}\frac{h}{r_1} = 1 + \frac{gh}{c^2} = 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}; \qquad (D.70)$$

que era lo que se quería probar.

- **Solución 10.3**

Los radios de Schwarzschild para cada uno de los objetos son:

a) $$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6{,}6742 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \times 10^8\ \mathrm{kg}}{(299792458)^2\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}}$$

$$= 1{,}4852 \times 10^{-19}\ \mathrm{m}. \qquad (D.71)$$

b) Tomaremos como masa de la Tierra $M = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg; por lo que su radio de Schwarzschild es $R_{Sch} = 0{,}0089\ m$; (D.72)
o sea, unos 9 milímetros.

c) Tomaremos como masa del Sol $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg; por lo que su radio de Schwarzschild es $R_{Sch} = 2956\ m$; (D.73)
o sea, unos 3 kilómetros.

d) En este caso el valor del radio de Schwarzschild es

$$R_{Sch} = 7{,}68 \times 10^9 \text{ m} = 0{,}0514 \; u.a.; \qquad (D.74)$$

o sea, un 5% de la unidad astronómica; que es la distancia media Tierra-Sol. El planeta más cercano al Sol es Mercurio cuyo radio medio de su órbita es aproximadamente 7 veces más grande que este valor obtenido.

El último caso corresponde a la masa del agujero negro en el centro de nuestra galaxia; vemos que su tamaño es muy pequeño comparado con las dimensiones del sistema solar y por lo tanto despreciable respecto de las dimensiones de la propia galaxia.

- **Solución 10.4**

La aceleración de la gravedad g_n en la superficie de una estrella de neutrones con masa M = 1,6 masas solares y un radio R = 10km, está dada por

$$g_n = \frac{GM}{R^2} = \frac{6{,}6742 \times 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2} \times 1{,}6 \times 1{,}99 \times 10^{30}\, kg}{(10^4)^2\, m^2}$$

$$= 2{,}1251 \times 10^{12} \frac{m}{s^2}. \qquad (D.75)$$

La velocidad de escape, en unidades respecto de la velocidad de la luz, está dada por la ecuación (10.23); que en este caso es

$$\frac{v_e}{c} = \sqrt{\frac{2GM}{c^2 R}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}6742 \times 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2} \times 1{,}6 \times 1{,}99 \times 10^{30}\, kg}{(299792458)^2\, m^2 s^{-2} \times (10^4)\, m}}$$

$$= 0{,}68767; \qquad (D.76)$$

o equivalentemente $v_e = 2{,}0616 \times 10^8 \frac{m}{s}$.

- **Solución 10.5**

a) Para un sistema binario, bajo la interacción gravitatoria, con cuerpos de masa m_1 y m_2, la energía está en principio dada por

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{\left|\vec{X}_1 - \vec{X}_2\right|}; \qquad (D.77)$$

o sea, la suma de las energías cinéticas de cada partícula más la energía potencial de interacción gravitatoria.
En este caso conviene describir el movimiento respecto del sistema centro de masa; esto es, respecto del sistema en que el vector centro de masa $\vec{R}$, dado por

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{X}_1 + m_2 \vec{X}_2}{m_1 + m_2}, \qquad (D.78)$$

está en reposo en el origen del sistema de coordenadas. Además conviene introducir la coordenada relativa $\vec{r}$ definida por

$$\vec{r} \equiv \vec{X}_1 - \vec{X}_2; \qquad (D.79)$$

donde denotaremos con r su módulo. De requerir $\vec{R} = 0$ y la última ecuación se deduce fácilmente que

$$\vec{X}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad (D.80) \qquad \text{y} \qquad \vec{X}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \qquad (D.81)$$

De donde se deducen análogas relaciones para las velocidades. Reemplazando en la expresión para la energía se obtiene

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}, \qquad (D.82) \qquad \text{donde} \qquad m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \qquad (D.83)$$

y $\vec{v}$ es el vector velocidad correspondiente al vector posición $\vec{r}$, cuyo módulo denotamos con v. A m se le da el nombre de *masa reducida*.
Observamos, entonces que el problema de dos cuerpos es equivalente al problema mecánico de una partícula de masa m en el campo central $-\frac{Gm_1m_2}{r}$. El problema de una partícula en presencia de un potencial central gravitatorio fue extensamente discutido en la sección 1.4; con la única diferencia que en el potencial aparecía el producto mM en vez de m_1m_2. Esto indica que las ecuaciones se puede aplicar, siempre que se requiera que la masa M sea tal que se satisfaga

$$mM = m_1m_2. \qquad (D.84)$$

En particular en el ejercicio 1.5 se probó que la energía en término del semieje mayor a de un movimiento elíptico, está dada por

$$E = -\frac{GmM}{2a}; \qquad (D.85)$$

por lo que para el caso de un movimiento circular vale

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2r}. \qquad (D.86)$$

b) Si realizamos una variación de la expresión recién encontrada se obtiene

$$\delta E = \frac{Gm_1m_2}{2r^2}\,\delta r; \qquad (D.87)$$

donde estamos usando la ecuación (C.5), que nos dice que

$$df = \frac{df}{dx}dx = nx^{n-1}dx, \qquad (D.88)$$

para el caso en que $f = x^n$. En nuestro caso tenemos $f = r^{-1}$; y hemos usado la notación δ en vez de la notación d.
De aquí se deduce que si $\delta E = -\mathcal{E}$, entonces

$$\delta r = -\mathcal{E}\frac{2r^2}{Gm_1m_2}; \qquad (D.89)$$

por lo que la órbita decrece su radio.

c) De la tercera ley de Kepler se tiene que

$$\frac{r^3}{T^2} = \textit{constante}; \qquad (D.90)$$

por lo que cuando realizamos una variación se obtiene

$$3\frac{r^2}{T^2}\delta r - 2\frac{r^3}{T^3}\delta T = 0\,; \qquad (D.91)$$

o equivalentemente

$$\delta T = \frac{3}{2}\frac{T}{r}\delta r = -\mathcal{E}\frac{3rT}{Gm_1m_2}. \qquad (D.92)$$

Vemos que el período de la órbita decrece.

Capítulo 12

- **Solución 12.1**

  Las masas m_e del electrón, m_p del protón y m_n del neutrón tienen los siguientes valores:

  $m_e = 9,1091 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1,6725 \times 10^{-27}$ kg y $m_n = 1,6748 \times 10^{-27}$ kg

  De aquí se deduce que en unidades de energía se tiene:

$$m_ec^2 = 9{,}1091 \times 10^{-31}\, kg\, (299792458)^2\, m^2s^{-2} = 8{,}1869 \times 10^{-14} J$$

$$= 0{,}51098\ MeV; \qquad (D.93)$$

  donde hemos usado la relación entre electrón-volt (eV) y Joule (J) presentada en la tabla A.2.

  Similarmente para el caso del protón y neutrón se tiene:

$$m_pc^2 = 1{,}6725 \times 10^{-27}\, kg\, (299792458)^2\, m^2s^{-2} = 1{,}5932 \times 10^{-10} J$$

$$= 938{,}20\ MeV; \qquad (D.94)$$

  y

$$m_nc^2 = 1{,}6748 \times 10^{-27}\, kg\, (299792458)^2\, m^2s^{-2} = 1{,}5052 \times 10^{-10} J$$

$$= 939{,}49\ MeV. \qquad (D.95)$$

Capítulo 14

- **Solución 14.1**

  Este ejercicio no lo resolveremos aquí, pues consideramos que es democráticamente saludable involucrarse con un control sano de las tareas del estado.
  Sólo señalamos que se debe tener mucho cuidado con la elección de las fuentes.
  A comienzos de 2009 el enlace:
  http://energia3.mecon.gov.ar/contenidos/verpagina.php?idpagina=2973
  provee de una página con enlaces a archivos con información pertinente.
  En lo posible es conveniente obtener información complementaria de fuentes externas; que permitan contrastar la fidelidad de los datos.

Referencias

[Ab05] All-biographies. James Prescott Joule. Scientic American Supplement. Vol. XIV, No. 363, http://all-biographies.com/scientists/james prescott joule.htm, 2005.

[Dir58] P.A.M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Oxford, fourth, revised edition, 1958.

[EI58] Albert Einstein and Leopold Infeld. *La Física, Aventura del Pensamiento*. Editorial Losada S.A., Buenos Aires, 1958.

[Ein52] A. Einstein. On the influence of gravitation on the propagation of light. In *The Principle of Relativity*. Dover pub. Inc., New York, 1952. Translated from: Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes, Annalen der Physik, 35, 1911.

[Fer68] Enrico Fermi. *Termodinámica*. Eudeba, 1968.

[Ge08] L. Guzzo and et.al. A tests of the nature of cosmic acceleration using galaxy redshift distortions. *Nature*, 451:541-544, 2008.

[GKM93] R.J. Gleiser, C.N. Kozameh, and O.M. Moreschi, editors. *General Relativity and Gravitation 1992*. IOP Pu. Ltd, Bristol, 1993.

[Gri87] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, Inc., New York, fourth edition, 1987.

[Gro08] Particle Data Group. *July 2008 Particle Physics Booklet*. Elsevier, Berkeley, 2008. http://pdg.lbl.gov/.

[Hei49] Werner Heisenberg. *The Physical Principles of the Quantum Theory*. Dover Pub. Inc., New York, 1949.

[HT75] R. A. Hulse and J. H. Taylor. *ApJ*, 195:L51, 1975.

[IK66] Ingard, Uno and Kraushaar, William L. *Introduccion al estudio de la mecánica, materia y ondas*. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1966.

[Kip87] Rudolf Kippenhahn. *Light from the Depths of Time*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Me08] C. Marinoni and et.al. Geometrical tests of comological models III. The Cosmology-evolution diagram at z = 1. A. & A., 478:71-81, 2008.

[Mor00] O.M. Moreschi. *Fundamentos de la Mecánica de Sistemas de Partículas*. editorial Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, 2000.

[Res08] Wolfram Research. Rumford, Benjamin Thompson. http://scienceworld.wolfram.com/biography/Rumford.html, 2008.

[RS96] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov. Electroweak baryon number nonconservation in the early universe and in high-energy collisions. *Physics-Uspekhi*, 39(5):461-502, 1996.

[Sew68] Rev. Samuel Sewall. The history of woburn, middlesex county, mass. http://www.homeofourfathers.com/lisbeth/benjaminthompsonjrlifestory.htm, 1868.

Índice alfabético



Osvaldo Moreschi
Doctor en Física

"Energía - *Su relevancia en mecánica termodinámica, átomos, agujeros negros y cosmología*"

El término energía es empleado con mucha frecuencia en el lenguaje coloquial, sin embargo no siempre se lo usa como un conocimiento acabado de su concepto.

En realidad la noción de energía es usada con un significado muy preciso en la ciencia básica, denominada física. Como es costumbre en el desarrollo del conocimiento, en física se desarrollan distintos marcos teóricos que se adaptan a diferentes tipos de sistemas físicos. En la Introducción de este libro enumeramos, brevemente, algunos marcos teóricos.

Lo que podemos remarcar aquí es que la noción de energía en cada marco teórico de la física, es un concepto fundamental. Esto está asociado a la relación que hay entre simetrías de sistemas físicos y cantidades conservadas. Lo que sucede es que la energía es una cantidad conservada en una gran variedad de sistemas físicos; por lo que se constituye en un concepto muy útil para el estudio detallado de los mismos.

Asimismo, intentamos hacer un repaso de distintos sistemas físicos donde el concepto de energía nos brinda un mecanismo de unificación del discurso. Partimos de los sistemas mecánicos más sencillos, pasando por sistemas compuestos, termodinámicos, relativistas, atómicos, gravitatorios y llegando a discutir el sistema cosmológico y otros.

